ISSN 2075-9827

КМП

Карпатські математичні публікації

CARPATHIAN MATHEMATICAL PUBLICATIONS

КАРПАТСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ

Том 5

№ 2 2013

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал

Друкується за рішенням Вченої ради
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Адреса редакції: Факультет математики та інформатики
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57
Тел.: (0342) 59-60-50
e-mail: cmp.if.ua@gmail.com
Адреса в інтернеті: http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp/

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал

Т.5, №2

2013

Зміст

Carpathian mathematical publications

SCIENTIFIC JOURNAL
V.5, №2
2013

CONTENTS

Карпатские математические публикации

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Т.5, №2
2013

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 519.6

BAŞARIR M., ŞAHIN A.

ON THE STRONG AND Δ-CONVERGENCE FOR TOTAL ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS ON A $CAT(0)$ SPACE

Başarır M., Şahin A. *On the strong and Δ-convergence for total asymptotically nonexpansive mappings on a $CAT(0)$ space.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 170–179.

In this paper we give the strong and Δ-convergence theorems of the modified S-iteration and the modified two-step iteration processes for total asymptotically nonexpansive mappings on a $CAT(0)$ space. Our results extend and improve the corresponding recent results announced by many authors in the literature.

Key words and phrases: $CAT(0)$ space, total asymptotically nonexpansive mapping, strong convergence, Δ-convergence, iterative process, fixed point.

Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Arts, Sakarya University, Sakarya, Turkey
E-mail: basarir@sakarya.edu.tr (Başarır M.), ayuce@sakarya.edu.tr (Şahin A.)

INTRODUCTION

A metric space X is a $CAT(0)$ *space* if it is geodesically connected and every geodesic triangle in X is at least as "thin" as its comparison triangle in the Euclidean plane. Fixed point theory in a $CAT(0)$ space has been first studied by Kirk (see [9, 10]). He showed that every nonexpansive mapping defined on a bounded closed convex subset of a complete $CAT(0)$ space always has a fixed point. Since then the fixed point theory for various mappings in a $CAT(0)$ space has been rapidly developed and a lot of papers have appeared (see [4, 5, 6, 17, 18]).

Nanjaras and Panyanak [13] proved the demiclosedness principle for asymptotically nonexpansive mappings and gave the Δ-convergence theorem of the modified Mann iteration process for mappings of this type in a $CAT(0)$ space. Recently, Chang et. al. [3] introduced total asymptotically nonexpansive mappings and proved the demiclosedness principle for mappings of this type in a $CAT(0)$ space. Also, they presented the Δ-convergence theorem of the modified Mann iteration process for total asymptotically nonexpansive mappings in a $CAT(0)$ space.

In this paper, motivated by the above results, we get some results which are related to the strong and Δ-convergence of the modified S-iteration and the modified two-step iteration processes for total asymptotically nonexpansive mappings on a $CAT(0)$ space. Our results extend and improve the corresponding ones announced by Chang et. al. [3], Khan and Abbas [8], Nanjaras and Panyanak [13] and many others.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47H09, 47H10, 54H25, 58C30.

1 PRELIMINARIES AND LEMMAS

Let (X,d) be a metric space, K be a nonempty subset of X and let $T: K \to K$ be a mapping. Recall that T is said to be a nonexpansive mapping if

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y), \quad \forall x,y \in K.$$

The map T is said to be an asymptotically nonexpansive mapping if there exists a sequence $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ with $k_n \to 1$ such that

$$d(T^n x, T^n y) \leq k_n d(x,y), \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x,y \in K.$$

The map T is said to be a uniformly L-Lipschitzian mapping if there exists a constant $L > 0$ such that

$$d(T^n x, T^n y) \leq L d(x,y), \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x,y \in K.$$

Chang et. al. [3] defined the concept of total asymptotically nonexpansive mapping as follows.

Definition 1 ([3, Definition 2.1]). *Let (X,d) be a metric space, K be a nonempty subset of X and let $T: K \to K$ be a mapping. T is said to be a total asymptotically nonexpansive mapping if there exist non-negative real sequences $\{\mu_n\}, \{v_n\}$ with $\mu_n \to 0, v_n \to 0$ and a strictly increasing continuous function $\zeta: [0,\infty) \to [0,\infty)$ with $\zeta(0) = 0$ such that*

$$d(T^n x, T^n y) \leq d(x,y) + v_n \zeta(d(x,y)) + \mu_n$$

for all $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in K$.

Remark 1. *From the definitions, it is clear that each nonexpansive mapping is an asymptotically nonexpansive mapping with $k_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, each asymptotically nonexpansive mapping is a total asymptotically nonexpansive mapping with $\mu_n = 0$, $v_n = k_n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\zeta(t) = t$, $t \geq 0$, and each asymptotically nonexpansive mapping is a uniformly L-Lipschitzian mapping with $L = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{k_n\}$.*

We now give the definition and collect some basic properties of the $CAT(0)$ space.

Let (X,d) be a metric space. A *geodesic path* joining $x \in X$ and $y \in X$ (or more briefly, a *geodesic* from x to y) is a map $c: [0,l] \subset R \to X$ such that $c(0) = x$, $c(l) = y$ and $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ for all $t, t' \in [0,l]$. In particular, c is an isometry and $d(x,y) = l$. The image of c is called a *geodesic* (or *metric*) *segment* joining x and y. When it is unique, this geodesic is denoted by $[x,y]$. The space (X,d) is said to be a *geodesic space* if every two points of X are joined by a geodesic, and X is said to be a *uniquely geodesic space* if there is exactly one geodesic joining x and y for all $x, y \in X$.

A *geodesic triangle* $\Delta(x_1,x_2,x_3)$ in a geodesic metric space (X,d) consist of three points in X (the vertices of Δ) and three geodesic segments joining each pair of vertices (the edges of Δ). A *comparison triangle* for the geodesic triangle $\Delta(x_1,x_2,x_3)$ in (X,d) is a triangle $\overline{\Delta}(x_1,x_2,x_3) = \Delta(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)$ in the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$ such that $d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}_i,\overline{x}_j) = d(x_i,x_j)$ for $i,j \in \{1,2,3\}$. Such a triangle always exists (see [2]).

A geodesic space is said to be a $CAT(0)$ space [2] if all geodesic triangles of appropriate size satisfy the following comparison axiom.

$CAT(0)$: Let Δ be a geodesic triangle in X and let $\overline{\Delta}$ be a comparison triangle for Δ. Then, Δ is said to satisfy the $CAT(0)$ *inequality* if for all $x, y \in \Delta$ and all comparison points $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{\Delta}$,

$$d(x,y) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x},\overline{y}).$$

Let $x, y \in X$, and by Lemma 2.1(iv) of [6] for each $t \in [0,1]$, there exists a unique point $z \in [x,y]$ such that

$$d(x,z) = td(x,y), \quad d(y,z) = (1-t)d(x,y). \tag{1}$$

From now on, we will use the notation $(1-t)x \oplus ty$ for the unique point z satisfying (1). By using this notation, Dhompongsa and Panyanak [6] obtained the following lemma which will be used frequently in the proof of our main results.

Lemma 1 ([6, Lemma 2.4]). *Let X be a $CAT(0)$ space. Then*

$$d((1-t)x \oplus ty, z) \leq (1-t)d(x,z) + td(y,z)$$

for all $t \in [0,1]$ and $x, y, z \in X$.

In 1976 Lim [12] introduced the concept of Δ-convergence in a general metric space. In 2008 Kirk and Panyanak [11] specialized Lim's concept to the $CAT(0)$ space and proved that it is very similar to the weak convergence in a Banach space. Also, Dhompongsa and Panyanak [6] obtained the Δ-convergence theorems for the Picard, Mann and Ishikawa iterations in a $CAT(0)$ space for nonexpansive mappings.

Let $\{x_n\}$ be a bounded sequence in a $CAT(0)$ space X. For $x \in X$, we set $r(x,\{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} d(x,x_n)$. The *asymptotic radius* $r(\{x_n\})$ of $\{x_n\}$ is given by

$$r(\{x_n\}) = \inf\{r(x,\{x_n\}) : x \in X\}$$

and the *asymptotic center* $A(\{x_n\})$ of $\{x_n\}$ is the set

$$A(\{x_n\}) = \{x \in X : r(x,\{x_n\}) = r(\{x_n\})\}.$$

It is known that in a complete $CAT(0)$ space, $A(\{x_n\})$ consists of exactly one point (see [5, Proposition 7]).

Definition 2 ([11, 12]). *A sequence $\{x_n\}$ in a $CAT(0)$ space X is said to be Δ-convergent to $x \in X$ if x is the unique asymptotic center of $\{u_n\}$ for every subsequence $\{u_n\}$ of $\{x_n\}$. In this case we write Δ-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ and x is called the Δ-limit of $\{x_n\}$.*

Lemma 2. *i) Every bounded sequence in a complete $CAT(0)$ space always has a Δ-convergent subsequence (see [11, p. 3690]).*

ii) Let K be a nonempty closed convex subset of a complete $CAT(0)$ space and let $\{x_n\}$ be a bounded sequence in K. Then the asymptotic center of $\{x_n\}$ is in K (see [4, Proposition 2.1]).

Lemma 3 ([6, Lemma 2.8]). *If $\{x_n\}$ is a bounded sequence in a complete $CAT(0)$ space with $A(\{x_n\}) = \{x\}$, $\{u_n\}$ is a subsequence of $\{x_n\}$ with $A(\{u_n\}) = \{u\}$ and the sequence $\{d(x_n,u)\}$ converges, then $x = u$.*

In [3] it is proved demiclosedness principle for total asymptotically nonexpansive mappings in a $CAT(0)$ space as follows.

Lemma 4 ([3, Theorem 2.8]). *Let K be a closed convex subset of a complete $CAT(0)$ space X and let $T : K \to K$ be a total asymptotically nonexpansive and uniformly L-Lipschitzian mapping. Let $\{x_n\}$ be a bounded sequence in K such that $\lim_{n\to\infty} d(x_n,Tx_n) = 0$ and Δ-$\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Then $Tp = p$.*

The following lemma is crucial in the study of iteration processes in metric spaces.

Lemma 5 ([14, Lemma 2]). *Let $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ and $\{\delta_n\}$ be sequences of non-negative real numbers satisfying the inequality*

$$a_{n+1} \leq (1+\delta_n)a_n + b_n.$$

If $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, then $\lim_{n\to\infty} a_n$ exists.

Lemma 6 ([13, Lemma 4.5]). *Let X be a $CAT(0)$ space, $x \in X$ be a given point and let $\{t_n\}$ be a sequence in $[b,c]$ with $b, c \in (0,1)$ and $0 < b(1-c) \leq \frac{1}{2}$. Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be any sequences in X such that*

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n,x) \leq r, \qquad \limsup_{n\to\infty} d(y_n,x) \leq r, \qquad \lim_{n\to\infty} d((1-t_n)x_n \oplus t_n y_n, x) = r$$

for some $r \geq 0$. Then

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0.$$

Agarwal, O'Regan and Sahu [1] introduced the modified S-iteration process which is independent of those of the modified Mann iteration [16] and the modified Ishikawa iteration [19]. We apply this iteration process into a $CAT(0)$ space as

$$\begin{cases} x_1 \in K \\ x_{n+1} = (1-a_n)T^n x_n \oplus a_n T^n y_n \\ y_n = (1-b_n)x_n \oplus b_n T^n x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

By taking $T^n = T$ for all $n \in \mathbb{N}$ in (2), we obtain the S-iteration process which is introduced in [1].

Thianwan [20] introduced the two-step iteration process in a Banach space. We give *the modified two-step iteration process* in a $CAT(0)$ space as follows

$$\begin{cases} x_1 \in K \\ x_{n+1} = (1-a_n)y_n \oplus a_n T^n y_n \\ y_n = (1-b_n)\,x_n \oplus b_n T^n x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3}$$

If $b_n = 0$ for each $n \in \mathbb{N}$, then (3) reduces to the modified Mann iteration process. By taking $T^n = T$ for all $n \in \mathbb{N}$ in (3), we obtain the two-step iteration process.

Our purpose in this paper is to get some results on the strong and Δ-convergence of the modified S-iteration and the modified two-step iteration processes for total asymptotically nonexpansive mappings in a $CAT(0)$ space. It is worth mentioning that our results in a $CAT(0)$ space can be applied to any $CAT(k)$ space with $k \leq 0$ since any $CAT(k)$ space is a $CAT(m)$ space for every $m \geq k$ (see [2, p. 165]).

2 Main results

We will denote the set of fixed points of T by $F(T)$, that is, $F(T) = \{x \in X : Tx = x\}$. Firstly, we prove the Δ-convergence theorem of the modified S-iteration process in a $CAT(0)$ space.

Theorem 1. *Let K be a nonempty bounded closed convex subset of a complete $CAT(0)$ space X, $T : K \to K$ be a total asymptotically nonexpansive and uniformly L-Lipschitzian mapping with $F(T) \neq \varnothing$ and let $\{x_n\}$ be a sequence defined by (2). If the following conditions are satisfied:*

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;

(ii) there exists a constant $M^* > 0$ such that $\zeta(r) \leq M^* r, r \geq 0$;

(iii) $\{b_n\}$ is the sequence in $[0,1]$;

(iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\{d(z, T^n z) : z \in B\} < \infty$ for each bounded subset B of K;

(v) there exist constants $b, c \in (0,1)$ with $0 < b(1-c) \leq \frac{1}{2}$ such that $\{a_n\} \subset [b,c]$,

then the sequence $\{x_n\}$ Δ-converges to a fixed point of T.

Proof. We divide the proof of Theorem 1 into three steps.

Step I. First we prove that for each $p \in F(T)$ the following limit $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, p)$ exists. In fact for each $p \in F(T)$, by Lemma 1, we have

$$\begin{aligned}
d(y_n, p) &= d((1-b_n)x_n \oplus b_n T^n x_n, p) \leq (1-b_n)d(x_n,p) + b_n d(T^n x_n, p) \\
&\leq (1-b_n)d(x_n,p) + b_n\{d(x_n,p) + v_n\zeta(d(x_n,p)) + \mu_n\} \\
&\leq (1 + b_n v_n M^*)\, d(x_n,p) + b_n\mu_n \leq (1 + v_n M^*)\, d(x_n,p) + \mu_n.
\end{aligned}$$

Also, we obtain

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, p) &= d((1-a_n)T^n x_n \oplus a_n T^n y_n, p) \leq (1-a_n)d(T^n x_n, p) + a_n d(T^n y_n, p) \\
&\leq (1-a_n)\{d(x_n,p) + v_n\zeta(d(x_n,p)) + \mu_n\} + a_n L d(y_n, p) \\
&\leq (1-a_n)\{(1+v_nM^*)\, d(x_n,p) + \mu_n\} + a_n L\{(1+v_nM^*)\, d(x_n,p) + \mu_n\} \\
&= \{(1-a_n)(1+v_nM^*) + a_n L(1+v_nM^*)\}\, d(x_n,p) + (1 + a_n(L-1))\mu_n \\
&= \{1 + a_n(L-1) + v_nM^*(1 + a_n(L-1))\}\, d(x_n,p) + (1 + a_n(L-1))\mu_n.
\end{aligned}$$

It follows from condition (i) and Lemma 5 that $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ exists.

Step II. Next we prove that

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0. \tag{4}$$

In fact, it follows from Step I that for all $p \in F(T)$, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,p)$ exists, so we can assume that $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,p) = r$. Since

$$\begin{aligned}
d(T^n y_n, p) &= d(T^n y_n, T^n p) \leq d(y_n,p) + v_n\zeta(d(y_n,p)) + \mu_n \leq (1+v_nM^*)\, d(y_n,p) + \mu_n \\
&\leq (1+v_nM^*)\{(1+v_nM^*)\, d(x_n,p) + \mu_n\} + \mu_n \\
&= (1+v_nM^*)(1+v_nM^*)\, d(x_n,p) + (2 + v_nM^*)\,\mu_n,
\end{aligned}$$

we have $\limsup_{n\to\infty} d(T^n y_n, p) \leq r$. Similarly, we obtain $\limsup_{n\to\infty} d(T^n x_n, p) \leq r$. On the other hand, since $\lim\limits_{n\to\infty} d((1-a_n)T^n x_n \oplus a_n T^n y_n, p) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, p) = r$, by Lemma 6, we have

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n x_n, T^n y_n) = 0. \tag{5}$$

Since $d(x_{n+1}, T^n x_n) \leq d((1-a_n)T^n x_n \oplus a_n T^n y_n, T^n x_n) \leq a_n d(T^n y_n, T^n x_n)$ from (5), we obtain

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, T^n x_n) = 0. \tag{6}$$

From condition (iv), we have

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T^n x_n) = 0. \tag{7}$$

Hence from (6) and (7) we get

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{8}$$

Since T is a uniformly L-Lipschitzian mapping, from (7) and (8) we have that

$$\begin{aligned}
d(x_n, Tx_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T^{n+1}x_{n+1}) + d(T^{n+1}x_{n+1}, T^{n+1}x_n) + d(T^{n+1}x_n, Tx_n) \\
&\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T^{n+1}x_{n+1}) + Ld(x_{n+1}, x_n) + Ld(T^n x_n, x_n) \\
&= (1+L)d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T^{n+1}x_{n+1}) + Ld(T^n x_n, x_n) \to 0 \quad (\text{as } n \to \infty).
\end{aligned}$$

The equation (4) is proved.

Step III. To show that the sequence $\{x_n\}$ Δ-converges to a fixed point of T, we prove that

$$W_\Delta(x_n) = \bigcup_{\{u_n\}\subset\{x_n\}} A(\{u_n\}) \subseteq F(T)$$

and $W_\Delta(x_n)$ consists of exactly one point. Let $u \in W_\Delta(x_n)$. Then there exists a subsequence $\{u_n\}$ of $\{x_n\}$ such that $A(\{u_n\}) = \{u\}$. By Lemma 2, there exists a subsequence $\{v_n\}$ of $\{u_n\}$ such that $\Delta\text{-}\lim_{n\to\infty} v_n = v \in K$. By Lemma 4, $v \in F(T)$. Since $\{d(u_n, v)\}$ converges, by Lemma 3, $u = v$. This shows that $W_\Delta(x_n) \subseteq F(T)$. Now we prove that $W_\Delta(x_n)$ consists of exactly one point. Let $\{u_n\}$ be a subsequence of $\{x_n\}$ with $A(\{u_n\}) = \{u\}$ and let $A(\{x_n\}) = \{x\}$. We have already seen that $u = v$ and $v \in F(T)$. Finally, since $\{d(x_n, v)\}$ converges, by Lemma 3, $x = v \in F(T)$. This shows that $W_\Delta(x_n) = \{x\}$. □

Now we give an example of such mappings which are total asymptotically nonexpansive and uniformly L-Lipschitzian as in Theorem 1.

Let $\mathbb{R}$ be the real line with the usual norm $|\cdot|$ and let $K = [-1,1]$. Define two mappings $T, S : K \to K$ by

$$T(x) = \begin{cases} -2\sin\frac{x}{2}, & \text{if } x \in [0,1] \\ 2\sin\frac{x}{2}, & \text{if } x \in [-1,0) \end{cases} \quad \text{and} \quad S(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \in [0,1] \\ -x, & \text{if } x \in [-1,0). \end{cases}$$

It is proved in [7, Example 3.1] that both T and S are asymptotically nonexpansive mappings. Therefore they are total asymptotically nonexpansive and uniformly L-Lipschitzian mappings. Additionally, $F(T) = \{0\}$ and $F(S) = \{x \in K; 0 \leq x \leq 1\}$.

We give the characterization of strong convergence for the modified S-iteration process on a $CAT(0)$ space as follows.

Theorem 2. *Let $X, K, T, \{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ satisfy the hypotheses of Theorem 1. Then the sequence $\{x_n\}$ converges strongly to a fixed point of T if and only if*

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0,$$

where $d(x, F(T)) = \inf\{d(x,p) : p \in F(T)\}$.

Proof. Necessity is obvious. Conversely, suppose that $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$. As proved in Theorem 1 (Step I), for all $p \in F(T)$,

$$d(x_{n+1}, p) \leq \{1 + a_n(L-1) + v_n M^*(1 + a_n(L-1))\} d(x_n, p) + (1 + a_n(L-1))\mu_n.$$

This implies that

$$d(x_{n+1}, F(T)) \leq \{1 + a_n(L-1) + v_n M^*(1 + a_n(L-1))\} d(x_n, F(T)) + (1 + a_n(L-1))\mu_n.$$

By Lemma 5, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T))$ exists. Thus by hypothesis $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$.

Next, we show that $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in K. Let $\varepsilon > 0$ be arbitrarily chosen. Since $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$, there exists a positive integer n_0 such that

$$d(x_n, F(T)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

for all $n \geq n_0$. In particular, $\inf\{d(x_{n_0}, p) : p \in F(T)\} < \frac{\varepsilon}{4}$. Thus, there exists $p^* \in F(T)$ such that

$$d(x_{n_0}, p^*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Now, for all $m, n \geq n_0$, we have

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+m}, p^*) + d(x_n, p^*) \leq 2d(x_{n_0}, p^*) < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Hence $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in the closed subset K of a complete $CAT(0)$ space and so it must be convergent to a point q in K. Now, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ gives that $d(q, F(T)) = 0$ and closedness of $F(T)$ forces q to be in $F(T)$. This completes the proof. □

Senter and Dotson [15] introduced the concept of *Condition* (I) as follows.

Definition 3 ([15, p. 375]). *A mapping $T : K \to K$ is said to satisfy Condition (I) if there exists a non-decreasing function $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ with $f(0) = 0$ and $f(r) > 0$ for all $r > 0$ such that*

$$d(x, Tx) \geq f(d(x, F(T))), \quad \forall\, x \in K.$$

With respect to the above definition, we have the following strong convergence theorem.

Theorem 3. *Let $X, K, T, \{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ satisfy the hypotheses of Theorem 1 and let T be a mapping satisfying Condition (I). Then the sequence $\{x_n\}$ converges strongly to a fixed point of T.*

Proof. As proved in Theorem 2, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T))$ exists. Also, by Theorem 1 (Step II), we have $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$. It follows from *Condition* (I) that

$$\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F(T)) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0.$$

That is, $\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F(T)) = 0$. Since $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is a non-decreasing function satisfying $f(0) = 0$ and $f(r) > 0$ for all $r > 0$, we obtain

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0.$$

The conclusion now follows from Theorem 2. □

Remark 2. *Theorems 1–3 contain some results of Khan and Abbas [8, Theorems 1–3] since each nonexpansive mapping is a total asymptotically nonexpansive mapping.*

Now, we give the Δ-convergence theorem of the modified two-step iteration process in a $CAT(0)$ space.

Theorem 4. *Let $X, K, T, \{b_n\}$ satisfy the hypotheses of Theorem 1, $\{a_n\}$ be a sequence in $[0,1]$ and let $\{x_n\}$ be a sequence defined by (3). If the conditions (i)–(iv) in Theorem 1 are satisfied, then the sequence $\{x_n\}$ Δ-converges to a fixed point of T.*

Proof. First we prove that for all $p \in F(T)$ the following limit $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ exists. As proved in Theorem 1, we have

$$d(y_n, p) \leq (1 + v_n M^*) d(x_n, p) + \mu_n. \tag{9}$$

Since T is a uniformly L-Lipschitzian mapping, from (9) we have

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, p) &= d((1-a_n)y_n \oplus a_n T^n y_n, p) \\ &\leq (1-a_n)d(y_n, p) + a_n d(T^n y_n, p) \\ &\leq (1-a_n)d(y_n, p) + a_n L d(y_n, p) \\ &= (1 + a_n(L-1))\, d(y_n, p) \\ &\leq (1 + a_n(L-1))\{(1 + v_n M^*) d(x_n, p) + \mu_n\} \\ &= \{1 + a_n(L-1) + v_n M^*(1 + a_n(L-1))\} d(x_n, p) + (1 + a_n(L-1))\mu_n. \end{aligned}$$

It follows from Lemma 5 that $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ exists. Next we prove that $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$. From condition (iv), we have

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T^n x_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, T^n y_n) = 0. \tag{10}$$

By the above equality, we get

$$d(T^n x_n, T^n y_n) \leq L d(x_n, y_n) \leq L b_n d(x_n, T^n x_n) \leq L d(x_n, T^n x_n) \to 0 \;\; (\text{as } n \to \infty). \tag{11}$$

Since

$$d(x_{n+1}, T^n y_n) \leq d((1-a_n)y_n \oplus a_n T^n y_n, T^n y_n) \leq (1-a_n) d(y_n, T^n y_n)$$

from (10), we obtain

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, T^n y_n) = 0. \tag{12}$$

From (10), (11) and (12) we have that

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, T^n x_n) + d(T^n x_n, T^n y_n) + d(T^n y_n, x_{n+1}) \to 0 \;\; (\text{as } n \to \infty).$$

The rest of the proof follows the pattern of the Theorem 1 and is therefore omitted. □

Remark 3. *Theorem 4 contains the main result of Chang et. al. [3, Theorem 3.5] since the modified two-step iteration reduces to the modified Mann iteration. Also, Theorem 4 contains the main result of Nanjaras and Panyanak [13, Theorem 5.7] since each asymptotically nonexpansive mapping is a total asymptotically nonexpansive mapping.*

Finally, we give following theorems related to the strong convergence of the modified two-step iteration process which their proofs are similar arguments of Theorem 2 and Theorem 3, respectively.

Theorem 5. *Let $X, K, T, \{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ satisfy the hypotheses of Theorem 4. Then the sequence $\{x_n\}$ converges strongly to a fixed point of T if and only if $\liminf\limits_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$.*

Theorem 6. *Let $X, K, T, \{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ satisfy the hypotheses of Theorem 4 and let T be a mapping satisfying Condition (I). Then the sequence $\{x_n\}$ converges strongly to a fixed point of T.*

References

[1] Agarwal R.P., O'Regan D., Sahu D.R. *Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings.* J. Nonlinear Convex Anal. 2007, **8** (1), 61–79.

[2] Bridson M., Haefliger A. Metric spaces of non-positive curvature. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[3] Chang S.S., Wang L., Joesph Lee H.W., Chan C.K., Yang L. *Demiclosed principle and Δ-convergence theorems for total asymptotically nonexpansive mappings in $CAT(0)$ spaces.* Appl. Math. Comput. 2012, **219** (5), 2611–2617. doi:10.1016/j.amc.2012.08.095

[4] Dhompongsa S., Kirk W.A., Panyanak B. *Nonexpansive set-valued mappings in metric and Banach spaces.* J. Nonlinear Convex Anal. 2007, **8** (1), 35–45.

[5] Dhompongsa S., Kirk W.A., Sims B. *Fixed point of uniformly lipschitzian mappings.* Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl. 2006, **65** (4), 762–772. doi:10.1016/j.na.2005.09.044

[6] Dhompongsa S., Panyanak B. *On Δ-convergence theorems in $CAT(0)$ spaces.* Comput. & Math. Appl. 2008, **56** (10), 2572–2579. doi:10.1016/j.camwa.2008.05.036

[7] Guo W.P., Cho Y.J., Guo W. *Convergence theorems for mixed type asymptotically nonexpansive mappings.* Fixed Point Theory Appl. 2012, **2012**:224. doi:10.1186/1687-1812-2012-224

[8] Khan S.H., Abbas M. *Strong and Δ-convergence of some iterative schemes in $CAT(0)$ spaces.* Comput. & Math. Appl. 2011, **61** (1), 109–116. doi:10.1016/j.camwa.2010.10.037

[9] Kirk W.A. Geodesic geometry and fixed point theory. In: Seminar of Mathematical Analysis (Malaga/Seville, 2002/2003), Colec. Abierta, Univ. Sevilla Secr. Publ., Seville 2003, **64**, 195–225.

[10] Kirk W.A. Geodesic geometry and fixed point theory II. In: International Conference on Fixed Point Theory Appl., Yokohama Publ., Yokohama, 2004, 113–142.

[11] Kirk W.A., Panyanak B. *A concept of convergence in geodesic spaces.* Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl. 2008, **68** (12), 3689–3696. doi:10.1016/j.na.2007.04.011

[12] Lim T.C. *Remarks on some fixed point theorems.* Proc. Amer. Math. Soc. 1976, **60**, 179–182. doi:10.1090/S0002-9939-1976-0423139-X

[13] Nanjaras B., Panyanak B. *Demiclosed principle for asymptotically nonexpansive mappings in $CAT(0)$ spaces.* Fixed Point Theory Appl. 2010, **2010**:268780. doi:10.1155/2010/268780

[14] Qihou L. *Iterative sequences for asymptotically quasi-nonexpansive mappings with error member.* J. Math. Anal. Appl. 2001, **259** (1), 18–24. doi:10.1006/jmaa.2000.7353

[15] Senter H.F., Dotson W.G. *Approximating fixed points of nonexpansive mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. 1974, **44** (2), 375–380. doi:10.1090/S0002-9939-1974-0346608-8

[16] Schu J. *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings.* Bull. Austral. Math. Soc. 1991, **43** (1), 153–159. doi:10.1017/S0004972700028884

[17] Şahin A., Başarır M. On the strong and Δ-convergence theorems for nonself mappings on a $CAT(0)$ space. In: Proc. of the 10th IC-FPTA, Cluj-Napoca, Romania, July 9–18, 2012, 227–240.

[18] Şahin A., Başarır M. *On the strong convergence of a modified S-iteration process for asymptotically quasi-nonexpansive mappings in a $CAT(0)$ space.* Fixed Point Theory Appl. 2013, **2013**:12. doi:10.1186/1687-1812-2013-12

[19] Tan K.K., Xu H.K. *Fixed point iteration processes for asymptotically nonexpansive mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. 1994, **122** (3), 733–739. doi:10.1090/S0002-9939-1994-1203993-5

[20] Thianwan S. *Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space.* J. Comput. Appl. Math. 2009, **224** (2), 688–695. doi:10.1016/j.cam.2008.05.051

Received 20.05.2013

Revised 04.07.2013

Башарір М., Шагін А. *Про сильну і Δ-збіжність для тотальних асимптотично нерозширюваних відображень на $CAT(0)$ простір* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 170–179.

В цій статті ми доводимо теореми про сильну і Δ-збіжність модифікованих S-ітерацій і модифікованих двокрокових ітераційних процесів для тотальних асимптотично нерозширюваних відображень на $CAT(0)$ простір. Наші результати розширюють і покращують відповідні недавні результати, що анонсовані багатьма авторами в літературі.

Ключові слова і фрази: $CAT(0)$ простір, тотальне асимптотично нерозширюване відображення, сильна збіжність, Δ-збіжність, ітераційний процес, нерухома точка.

Башарир М., Шагин А. *О сильной и Δ-сходимости для тотальных ассимптотически нерасширяющихся отображений на $CAT(0)$ пространство* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 170–179.

В этой статье мы доказываем теоремы о сильной и Δ-сходимости модифицированных S-итераций и модифицированных двухшаговых итерационных процессов для тотальных ассимптотически нерасширяющихся отображений на $CAT(0)$ пространство. Наши результаты расширяют и улучшают соответсвующие недавние результаты, анонсированные многими авторами в литературе.

Ключевые слова и фразы: $CAT(0)$ пространство, тотальное ассимптотически нерасширяющееся отображение, сильная сходимость, Δ-сходимость, итерационный процесс, неподвижная точка.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 519.217.4+519.217.6

Бігун Г.С.[1], Осипчук М.М.[2]

ДИФУЗІЇ, ПОРОДЖЕНІ ВІНЕРОВИМ ПРОЦЕСОМ

Бігун Г.С., Осипчук М.М. *Дифузії, породжені вінеровим процесом* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 180–186.

У роботі розглядається питання можливості побудови дифузійного процесу в $\mathbb{R}^m$ шляхом перетворення вінерового процесу. Застосовуються гладке перетворення фазового простору та випадкова заміна часу з допомогою адитивного функціоналу інтегрального типу.

Ключові слова і фрази: дифузійний процес, марківський процес, вінерів процес, перетворення фазового простору, випадкова заміна часу.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
[2] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: freischunhaluna@yandex.ru (Бігун Г.С.), myosyp@gmail.com (Осипчук М.М.)

Вступ

Нехай $(\xi(t))_{t\geq 0}$ — строго марківський процес зі значеннями в $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B})$ відносно деякого потоку σ-алгебр $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$, де $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^m$. Вважатимемо, що процес ξ однорідний і $P(t,x,\Gamma)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ — його ймовірність переходу. Такий процес називається дифузійним, якщо виконуються наступні умови. Насамперед, при всіх $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(t,x,dy) = 0.$$

Крім того, існують такі функції $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ та $b : \mathbb{R}^m \to L_s^+(\mathbb{R}^m)$ (тут $L_s^+(\mathbb{R}^m)$ — множина симетричних додатно визначених квадратичних матриць розміру $m \times m$), що при всіх $x, \theta \in \mathbb{R}^m$ і деякому $\varepsilon > 0$ мають місце рівності:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x,\theta) P(t,x,dy) = (a(x),\theta), \quad \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x,\theta)^2 P(t,x,dy) = (b(x)\theta,\theta),$$

де $(\cdot,\cdot)$ означає скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$. При цьому, функцію $a(x)$ називають вектором переносу, функцію $b(x)$ — матрицею (оператором) дифузії, а їх сукупність — локальними характеристиками дифузійного процесу $\xi(t)$. Є значна бібліографія, присвячена дифузійним процесам, починаючи від роботи А. М. Колмогорова [1]. Різноманітні питання теорії дифузійних процесів розглядались в роботах М. І. Портенка [2, 3, 4].

Якщо $a(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv I$ (I — одинична матриця), то $\xi(t)$ є вінеровим процесом, який далі позначатимемо $w(t)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60J60.

Нехай задана деяка вимірна функція $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Випадковий процес $f(\xi(t))$ є процесом, одержаним з $\xi(t)$ шляхом перетворення фазового простору. При певних умовах на f випадковий процес $\eta(t)$ є процесом Маркова.

Перетворення часу конструюватимемо наступним чином. Задавши додатну вимірну функцію $v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, розглянемо набір випадкових величин

$$\tau_t = \inf\left\{ s \geq 0 : \int_0^s v(\xi(u))\, du \geq t \right\}.$$

Випадковий процес $(\xi(\tau_t))_{t\geq 0}$ є марківським відносно потоку σ-алгебр $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ і називатимемо його таким, що одержаний з процесу $\xi(t)$ шляхом випадкової заміни часу. Перетворення марківських процесів детально описані в монографії Є. Б. Динкіна [5]

Означення. *Будемо казати, що однорідний дифузійний процес $\xi(t)_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}^m$ породжений вінеровим, якщо існує такий вінерів процес $(w(t))_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}^m$, що $\xi(t)$ може бути одержаний з $w(t)$ послідовним застосуванням до останнього перетворень фазового простору та випадкової заміни часу в розумінні збіжності локальних характеристик одержаного процесу та процесу $\xi(t)$.*

Відомо (див., наприклад, [4]), що в одновимірному випадку ($m = 1$) за умови локальної інтегровності функції $b^{-1}(x)a(x)$ відповідний дифузійний процес $\xi(t)$ породжений вінеровим.

Метою даної роботи є вивчення умов породжуваності дифузійних процесів вінеровим у випадках $m \geq 2$.

1 Перетворення простору та випадкова заміна часу

1.1 Перетворення фазового простору

Нехай $(\xi(t))_{t\geq 0}$ — дифузійний процес з вектором переносу $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$ та матрицею дифузії $(b(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$, а $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — двічі неперервно диференційовна взаємно однозначна функція.

Позначимо через $\mathfrak{U}_\xi$, $\mathfrak{U}_\eta$ характеристичні оператори процесів $\xi(t)$ та $\eta(t) = f(\xi(t))$ відповідно. Для кожної двічі неперервно диференційовної функції $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (див. [5]):

$$(\mathfrak{U}_\xi \varphi)(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(b(x)\nabla^2\varphi(x)) + (a(x))^T \nabla\varphi(x),$$

де $\nabla\varphi$ — градієнт функції φ, $\nabla^2\varphi$ — матриця других похідних функції φ, символ Sp означає слід — суму діагональних елементів — матриці. Тут і далі домовимось вважати всі вектори стовпчиками.

Для деякого $x \in \mathbb{R}^m$ розглянемо послідовність околів U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ точки x, яка збігається до x, що позначатимемо $U_n \downarrow x$, $n \to \infty$. Тоді з неперервності та взаємно однозначності функції f випливає, що $f^{-1}(U_n) \downarrow f^{-1}(x)$, $n \to \infty$, де, як звичайно, $f^{-1}(U)$ означає прообраз множини $U \subset \mathbb{R}^m$ при перетворенні f.

Нехай τ_n — момент першого виходу дифузійного процесу $\xi(t)$ з околу $f^{-1}(U_n)$ точки $f^{-1}(x)$. Якщо $\widehat{\tau}_n$ — момент першого виходу марківського процесу $\eta(t) = f(\xi(t))$ з околу U_n точки x, то, очевидно, $\widehat{\tau}_n = \tau_n$.

За означенням $(\mathfrak{U}_\xi\varphi)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbf{E}_x\varphi(\xi(\tau_n)) - \varphi(x)}{\mathbf{E}_x\tau_n}$, де $\mathbf{E}_x$ — символ умовного математичного сподівання при умові $\xi(0) = x$.

Для процесу $\eta(t)$ маємо

$$(\mathfrak{U}_\eta\varphi)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}_x\varphi(f(\xi(\widehat{\tau}_n))) - \varphi(x)}{\mathbf{E}_x\widehat{\tau}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}_{f^{-1}(x)}\varphi(f(\xi(\tau_n))) - \varphi(x)}{\mathbf{E}_{f^{-1}(x)}\tau_n} = (\mathfrak{U}_\xi\varphi(f))(f^{-1}(x))$$

Безпосередні обчислення дозволяють стверджувати, що для кожної двічі диференційовної функції φ

$$(\mathfrak{U}_\eta\varphi)(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\Big[((\nabla f)^T\, b\, \nabla f)(f^{-1}(x))\nabla^2\varphi(x)\Big] + \Big[(\nabla f)^T a + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,(b\,\nabla^2 f)\Big](f^{-1}(x))\nabla\varphi(x). \tag{1}$$

Зауважимо, що ∇f є матрицею градієнтів (складених у стовпчики) елементів векторної функції f, а $\nabla^2 f$ — набір (вектор) матриць других похідних елементів цієї ж функції. Саме на ці матриці множиться матриця b в другому доданку формули (1) і обчислюється слід одержаних матриць.

Отже, випадковий процес $\eta(t)$ є дифузійним з вектором переносу

$$\Big[(\nabla f)^T a + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,(b\,\nabla^2 f)\Big](f^{-1}(x))$$

та матрицею дифузії

$$\Big[(\nabla f)^T\, b\, \nabla f\Big](f^{-1}(x)).$$

Застосуємо тепер описане перетворення до вінерового процесу $w(t)$. Для нього, як уже згадувалось, $a(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv I$. Тоді характеристичний оператор процесу $\eta(t) = f(w(t))$ матиме вигляд

$$(\mathfrak{U}_\eta\varphi)(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\Big[((\nabla f)^T\nabla f)(f^{-1}(x))\nabla^2\varphi(x)\Big] + \frac{1}{2}(\Delta f)^T(f^{-1}(x))\nabla\varphi(x), \tag{2}$$

де Δf — результат (вектор) дії оператора Лапласа на елементи векторної функції f.

1.2 Випадкова заміна часу

Розглянемо адитивний функціонал $\varphi_t = \int_0^t v(\xi(s))\,ds$ від дифузійного процесу $\xi(t)$, де $(v(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$ — додатна неперервна функція. Побудуємо новий процес $\eta(t) = \xi(\tau_t)$, де $\tau_t = \inf\{s \ge 0 : \varphi_s \ge t\}$. Відомо [5], що між характеристичними операторами процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ існує зв'язок

$$(\mathfrak{U}_\eta\varphi)(x) = \frac{1}{v(x)}(\mathfrak{U}_\xi\varphi)(x), \tag{3}$$

причому області визначення обох операторів співпадають.

Таким чином, якщо дифузійний процес $\xi(t)$ має локальні характеристики $a(x)$ та $b(x)$, то процес $\eta(t)$ є дифузійним з вектором переносу $\dfrac{1}{v(x)}a(x)$ та матрицею дифузії $\dfrac{1}{v(x)}b(x)$.

2 Дифузійні процеси, породжені вінеровим

Нехай $(w(t))_{t\ge 0}$ — деякий вінерів процес в $\mathbb{R}^m$. Розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^m$ з допомогою деякої взаємно однозначної двічі неперервно диференційовної функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. В розділі 1 встановлено, що $\eta(t) = f(w(t))$, $t \ge 0$, є однорідним дифузійним процесом.

Перетворення часу в одержаному процесі $\eta(t)$ здійснюємо шляхом випадкової заміни часу з допомогою адитивного функціоналу $\int_0^s v^2(\eta(u))\,du$ з деякою числовою неперервною додатною функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$. Тут вибрано функцію v^2 для зручності подальших викладок.

Як встановлено в розділі 1 (див. (2), (3)) локальними характеристиками одержаного дифузійного процесу є вектор переносу з елементами $\frac{1}{2}(\Delta f_j)(f^{-1})\frac{1}{v^2}$ та матриця дифузії, яка має елементи $\Big[(\nabla f_i)^T\nabla f_j\Big](f^{-1})\frac{1}{v^2}$, де $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$.

Нехай задано функції $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ і $b : \mathbb{R}^m \to L_s^+(\mathbb{R}^m)$. Виникає питання — чи можна знайти такі функції f та v, для яких виконуються рівності ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$):

$$a_j(x) = \frac{1}{2}(\Delta f_j)(f^{-1}(x))\frac{1}{v^2(x)}, \qquad b_{ij}(x) = \Big[\nabla f_i(\nabla f_j)^T\Big](f^{-1}(x))\frac{1}{v^2(x)}\ ? \tag{4}$$

Позначимо через $(\sigma(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$ матрицю, для якої $\sigma^T\sigma = b$. Тоді система рівнянь (4) в матричній формі запишеться наступним чином:

$$\Delta f = 2a(f)v^2(f), \tag{5}$$

$$\nabla f = \sigma(f)v(f). \tag{6}$$

Вона задає зв'язок між невідомими функціями f і v та локальними характеристиками породженого вінеровим процесу: вектором переносу a і матрицею дифузії $b = \sigma^T\sigma$.

При $m = 1$ таку систему рівнянь розв'язати відносно f і v легко. Після нескладних перетворень одержуємо

$$f^{-1}(x) = \int_0^x \exp\Big\{-2\int_0^y \frac{a(z)}{b(z)}\,dz\Big\}\,dy, \qquad v(x) = \frac{\exp\Big\{-2\int_0^x \frac{a(z)}{b(z)}\,dz\Big\}}{\sigma(x)}.$$

Дослідимо існування розв'язків системи (5), (6) у випадку $m \ge 2$.

Для початку припустимо, що елементи матриці $\sigma(x)$ є принаймні диференційовними. Необхідною умовою існування розв'язку рівняння (6) є потенціальність векторних полів, що є стовпчиками матриці $\sigma(f)v(f)$ (нагадаємо, що $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$), тобто, для всіх $1 \le i < k \le m$, $1 \le j \le m$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}[\sigma_{ij}(f)v(f)] = \frac{\partial}{\partial x_i}[\sigma_{kj}(f)v(f)].$$

Звідси, з врахуванням (6), одержуємо, що при всіх $1 \le i < k \le m$, $1 \le j \le m$

$$\sum_l (\sigma_{kj}\sigma_{il} - \sigma_{ij}\sigma_{kl})\frac{\partial \ln v}{\partial u_l} = \sum_l \Big(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial u_l}\sigma_{kl} - \frac{\partial\sigma_{kj}}{\partial u_l}\sigma_{il}\Big). \tag{7}$$

де вважаємо $\sigma = \sigma(u)$, $v = v(u)$ ($u \in \mathbb{R}^m$).

Система рівнянь (7) є лінійною відносно $\frac{\partial \ln v}{\partial u_l}$ і має $\frac{m^2(m-1)}{2}$ рівнянь та m невідомих.

Врахувавши рівність (6) та те, що $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$, з (5) одержуємо наступну систему рівнянь для невідомих $\frac{\partial \ln v}{\partial u_l}$, $1 \le l \le m$:

$$\sum_l \sum_i \sigma_{ij}\sigma_{il}\frac{\partial \ln v}{\partial u_l} = 2a_j - \sum_l \sum_i \sigma_{il}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_l},\ 1 \le j \le m. \tag{8}$$

Основна матриця системи (8) невироджена, оскільки $\sum_i \sigma_{ij}\sigma_{il} = (\sigma^T\sigma)_{jl} = b_{jl}$. Тому (8) завжди має єдиний розв'язок. Остаточно маємо, що функція v повинна задовольняти системи рівнянь (7) і (8).

Зауваження. *Кількість невідомих та кількість рівнянь в системі (7) рівні тільки при $m = 2$. Крім того, ця система взагалі відсутня, якщо $m = 1$.*

Випадок $m \ge 3$ не дозволяє надіятись на існування таких функцій f і v, щоб дифузійний процес з їх допомогою був одержаний з вінерового.

Вже при $m = 3$ система рівнянь (7) містить дев'ять рівнянь з трьома невідомими. Крім того ранг розширеної матриці цієї системи дорівнює 4, якщо ж тільки система не є тотожно однорідною. Це можливо, наприклад, за умови сталої матриці дифузії. Але тоді $v(x) \equiv const$ і з системи (8) одержуємо, що $a(x) \equiv 0$.

Тому зосередимся на розгляді випадку $m = 2$. Основна матриця системи (7) при цьому має вигляд $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$, де $\delta = \det \sigma \ne 0$, бо $b = \sigma^T\sigma \in L_s^+(\mathbb{R}^2)$. Тому система (7) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок повинен бути розв'язком системи (8), яка, як зазначалось вище, завжди має єдиний розв'язок. Звідси одержуємо умови існування спільного розв'язку систем (7) та (8):

$$a_j(u) = \frac{1}{2}\Big(\sum_l \sum_i \sigma_{ij}\sigma_{il}\alpha_l + \sum_i \sum_l \sigma_{il}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_l}\Big)(u),\ \ 1 \le j \le m,\ u \in \mathbb{R}^m,\ \text{ де } \alpha(u) = \nabla \ln v(u). \tag{9}$$

Припустивши існування других похідних елементів матриці $\sigma(x)$, запишемо умову існування функції v, для якої виконувалася б рівність (9):

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\alpha_2 = \frac{\partial}{\partial u_2}\alpha_1. \tag{10}$$

Зауважимо, що із системи (7) випливають рівності

$$\alpha_1 = \frac{1}{\delta}\left(\sigma_{22}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial u_2} - \sigma_{12}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial u_2} + \sigma_{21}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial u_1} - \sigma_{11}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial u_1}\right),$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\delta}\left(-\sigma_{22}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial u_2} + \sigma_{12}\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial u_2} - \sigma_{21}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial u_1} + \sigma_{11}\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial u_1}\right),$$

які після деяких перетворень можна записати у вигляді

$$\alpha = \sigma^{-1}\operatorname{div}(\sigma) - \nabla \ln \delta, \tag{11}$$

де $\operatorname{div}(\sigma)$ означає стовпчик дивергенцій рядків матриці σ. При виконанні умови (10) знайдеться така єдина функція $v(u) = \exp\{V(u)\}$, що задовольняє системи рівнянь (7) і (8). Тут V — потенціал (потенціального згідно (10)) векторного поля α.

Нехай надалі виконується умова (10) з α, що задається рівністю (11). Тоді з рівняння (6), врахувавши рівність $(\nabla f)(f^{-1}) = (\nabla f^{-1})^{-1}$, яка доводиться безпосереднім обчисленням, одержимо

$$\nabla f^{-1}(x) = \frac{1}{v(x)}(\sigma(x))^{-1}. \tag{12}$$

Умовою існування розв'язку рівняння (12) є, як не складно перевірити, рівність (11). Отже, можемо записати $f^{-1}(x) = F(x)$, де $F_j(x)$ ($j = 1, 2$) — потенціал j-ого стовпчика матриці $\frac{1}{v}\sigma^{-1}$.

Залишилось зауважити, що за побудовою функція f задовольняє крім рівняння (6) ще і рівняння (5). Таким чином, ми можемо сформулювати основний результат цієї роботи.

Теорема. *Нехай дифузійний процес $(\xi(t))_{t\ge 0}$ має вектор переносу $a(x)$ та матрицю дифузії $b(x) = (\sigma(x))^T\sigma(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$), причому елементи матриці $\sigma(x)$ є двічі диференційовними функціями. Якщо функції $a(x)$ і $\sigma(x)$ пов'язані співвідношенням (9) та має місце умова (10) з врахуванням (11), то випадковий процес $\xi(t)$ є породженим вінеровим процесом.*

Розглянемо приклад дифузійного процесу, для якого не складно знайти відповідні перетворення вінерового процесу.

Приклад. *Нехай матриця дифузії діагональна, тобто $b(x,y) = \begin{pmatrix} r^2(x,y) & 0 \\ 0 & s^2(x,y) \end{pmatrix}$, де r і s — додатні двічі диференційовні функції. Тоді умова (10) має вигляд*

$$\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\frac{1}{r^2} = \left(s\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial y}\right)\frac{1}{s^2}$$

або ж $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln\frac{r}{s} = 0$, звідки одержуємо $\ln\frac{r}{s} = \varphi(x) + \psi(y)$, де $\varphi(x)$ і $\psi(y)$ — довільні диференційовні функції, або $\frac{r(x,y)}{s(x,y)} = e^{\varphi(x)}e^{\psi(y)}$. Отже, матриця дифузії може бути записана у вигляді

$$b(x,y) = s^2(x,y)\begin{pmatrix} e^{2\varphi(x)}e^{2\psi(y)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Із співвідношення (9) випливає, що вектор переносу повинен дорівнювати

$$a(x,y) = \frac{1}{2}s^2(x,y)\begin{pmatrix} e^{2(\varphi(x)+\psi(y))}\varphi'(x) \\ -\psi'(y) \end{pmatrix}.$$

При таких локальних характеристиках даного дифузійного процесу одержуємо представлення функції v

$$\nabla \ln v(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}\ln s(x,y) \\ -\frac{\partial}{\partial y}\ln s(x,y) - \psi'(y) \end{pmatrix}.$$

Тому $\ln v(x,y) = -\ln s(x,y) - \psi(y)$ і $v(x,y) = \frac{e^{-\psi(y)}}{s(x,y)}$.

Рівняння для функції f тепер приймає вигляд $\nabla f^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{\psi(y)} \end{pmatrix}$. *Звідси* $\left(f^{-1}(x,y)\right)^T = \left(\int_0^x e^{-\varphi(u)}du + C, \quad \int_0^y e^{\psi(u)}du + K \right)$, *де C і K — деякі сталі. Через інваріантність вінерового процесу відносно зсуву, можемо взяти $C = K = 0$. Таким чином функція f задовольняє систему рівнянь*

$$\int_0^{f_1(x,y)} e^{-\varphi(u)}du = x, \quad \int_0^{f_2(x,y)} e^{\psi(u)}du = y \, . \tag{13}$$

Зауважимо, що із (13) випливає правильність наступних рівностей $f_1(x,y) = g_1(x)$, $f_2(x,y) = g_2(y)$. Тобто перетворення фазового простору вінерового процесу потрібно здійснювати покоординатно. Крім того легко зрозуміти, що $xg_1(x) > 0$, $yg_2(y) > 0$ при всіх $x, y \in R \setminus \{0\}$, а $g_1(0) = g_2(0) = 0$.

REFERENCES

[1] Kolmogorov A.N. *On analytical methods in probability theory.* Uspekhi Mat. Nauk 1938, **5**, 5–41. (in Russian)

[2] Portenko N.I. Generalized diffusion processes. In: Translations of Mathematical Monographs, **83**. Amer. Math. Soc., 1990.

[3] Portenko M.I. Diffusion processes in media with membranes. In: Samoilenko A.M. (Ed.) Proc. Inst. Math., **10**. Institute of Mathematics of NAS of Ukarine, Kyiv, 1995. (in Ukrainian)

[4] Al Farah H., Portenko M. Limit theorem for the number of level crossings of a fixed weakly convergent sequence of diffusion processes. Institute of mathematics of NAS of Ukarine, Kyiv, 2007. (in Ukrainian)

[5] Dynkin E.B. Markov Processes. Springer, Berlin, Heidelberg, 1965.

Надійшло 28.04.2013

Bigun G.S., Osypchuk M.M. *Diffusions generated by the Wiener process.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 180–186.

The article concerns the possibility of making a diffusion process in $\mathbb{R}^m$ by converting the Wiener process. Here we apply a smooth transformation of phase space and random time substitution with the help of additive functional of integral type.

Key words and phrases: diffusion process, Markov process, Wiener process, the transformation of the phase space, random replacement time.

Бигун Г.С., Осипчук М.М. *Диффузии, порожденные винеровским процессом* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — C. 180–186.

В работе рассматривается вопрос возможности построения диффузионного процесса в $\mathbb{R}^m$ путем преобразования винеровсквого процесса. Применяются гладкое преобразование фазового пространства и случайная замена времени с помощью аддитивного функционала интегрального типа.

Ключевые слова и фразы: диффузионный процесс, марковский процесс, винеровский процесс, преобразование фазового пространства, случайная замена времени.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 515.12+512.58

БУБНЯК М.М.

ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ 1-ПЕРІОДИЧНОГО ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Бубняк М.М. *Оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — C. 187–195.

Встановлено оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду при умовах: якщо один елемент дробу належить комплексній площині з розрізом $(-\infty; -1/4]$, а сума модулів інших елементів обмежена деяким числом; а також, якщо елементи належать відповідним параболічним областям чи об'єднанню цих областей, а модулі елементів, починаючи з другого, обмежені.

Ключові слова і фрази: 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду, ознака Ворпіцького, об'єднання параболічних областей.

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна
E-mail: maria.bubnyak@gmail.com

ВСТУП

Теорема Ворпіцького та параболічні теореми [10, 12, 14] належать до класичних ознак збіжності неперервного дробу

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1}, \tag{1}$$

де $a_n \in \mathbb{C}$. У монографії [12, с.151] для дробу (1) встановлена оцінка швидкості узагальненої збіжності при належному виборі послідовності параболічних областей елементів. Новий підхід до дослідження класичних ознак збіжності дробу (1) на основі дробово-лінійних відображенння запропоновано в [6].

Для гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД) вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1} = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i(2)}}{1 + \ddots}}, \qquad a_{i(k)} \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

де $i(k) = i_1, \ldots, i_k$ — мультиіндекс $(1 \le i_j \le N)$, N — натуральне число, Д. Боднаром [7, с.93] доведено багатовимірний аналог теореми Ворпіцького, встановлено оцінку швидкості збіжності ГЛД (2) та аналоги параболічних теорем [7, с.111]. Т. Антонова [1] встановила багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів. Р. Дмитришин [9] дослідив збіжність багатовимірних g-дробів у параболічній

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

області та встановив оцінку швидкості збіжності цих дробів у деякій обмеженій області, яка міститься в параболі.

Х. Кучмінська одержала ряд аналогів [11, теореми 6.10-6.12, 6.15] цих ознак для двовимірних неперервних дробів вигляду

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{i,i}}{\Phi_i},\quad \Phi_i=1+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j+i,j}}{1}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i,i+j}}{1},\qquad a_{i,j}\in\mathbb{C}. \tag{3}$$

О. Сусь встановила аналог ознаки Ворпіцького для дробу (3).

Для ГЛД спеціального вигляду

$$1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{1}=1+\sum_{i_1=1}^{i_0}\frac{a_{i(1)}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\frac{a_{i(2)}}{1+\ddots}},\qquad a_{i(k)}\in\mathbb{C}, \tag{4}$$

де $1\le i_k\le i_{k-1}$, $i_0=N$, О. Баран [5] довела збіжність та встановила оцінку швидкості збіжності дробу (4), якщо всі його елементи задовольняють умови $|a_{i(k)}|\le\frac{t(1-t)}{i_{k-1}}$ ($t\in[0;1/2]$). У роботах [2, 3, 4] Т. Антонова дослідила кругові та параболічні області збіжності дробу (4) та встановила оцінки швидкості збіжності при певних додаткових умовах на елементи цього дробу.

1 Основні результати

Об'єктом наших досліджень є 1-періодичний ГЛД спеціального вигляду, який отримуємо з (4), якщо покласти: $a_{i(k)}=c_{i_k}$ ($1\le i_k\le i_{k-1}$, $k\ge 1$), тобто

$$\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}=\left(1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{i_1}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\frac{c_{i_2}}{1+\ddots}}\right)^{-1}, \tag{5}$$

де c_j — комплексні числа ($j=\overline{1,N}$), N — фіксоване натуральне число.

Означення 1. *Підхідним дробом n-го порядку 1-періодичного ГЛД (5) називають вираз*

$$F_n=\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1},\qquad n\ge 1;\ F_0=1.$$

Означення 2. *Вираз вигляду*

$$R_n^{(q)}=1+\mathop{D}_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{j_{k-1}}\frac{c_{j_k}}{1}=1+\sum_{j_1=1}^{j_0}\frac{c_{j_1}}{1+\sum\limits_{j_2=1}^{j_1}\frac{c_{j_2}}{1+\ddots\sum\limits_{j_{n-1}=1}^{j_{n-2}}\frac{c_{j_{n-1}}}{1+\sum\limits_{j_n=1}^{j_{n-1}}\frac{c_{j_n}}{1}}}}$$

назвемо n-тим залишком q-го порядку 1-періодичного ГЛД (5), $q=\overline{1,N}$, $n\ge 1$, $j_0=q$, $R_0^{(q)}=1$, $R_n^{(0)}=1$.

Повторюючи схему доведення теореми 4.1 [13, с.47], в якій встановлено оцінку швидкості збіжності зворотного гранично-періодичного дробу, отримуємо для 1-періодичного неперервного дробу наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай елементи c_n неперервного дробу*

$$1+\mathop{D}_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{1} \tag{6}$$

однакові ($c_n=c$) і $c\in G$, де $G=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|\arg\left(z+\frac{1}{4}\right)\right|<\pi\right\}$. Тоді справджується оцінка різниці двох підхідних дробів

$$|f_n-f_m|\le Mp^{m+1},\qquad n>m\ge 0,$$

де $M=\frac{2|x|}{1-p}$, $p=\left|\frac{y}{x}\right|$, $x=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$, $y=\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$ *— притягувальна та відповідно відштовхувальна точки дробово-лінійного відображення $t(\omega)=1+\frac{c}{\omega}$.*

Твердження 2. *Нехай для залишків дробу (5) виконуються нерівності*

$$|R_n^{(q)}|\ge g_n>0,\qquad n\ge 0;\ q=\overline{2,N};\ g_{-1}=1. \tag{7}$$

Тоді при $n>m\ge 0$ справджується оцінка

$$|F_n-F_m|\le\frac{1}{g_n\cdot g_m}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{C^k}{\prod_{r=1}^{k}g_{n-r}\cdot g_{m-r}}\left|R_{n-k}^{(1)}-R_{m-k}^{(1)}\right|+\frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1}g_{n-r}\cdot g_{m-r}}\right], \tag{8}$$

де

$$C=\sum_{j=2}^{N}|c_j|. \tag{9}$$

Доведення. Враховуючи, що $F_n=\left(R_n^{(N)}\right)^{-1}$, $n\ge 0$, $R_n^{(q)}=R_n^{(1)}+\sum_{j=2}^{q}\frac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}}$, $n\ge 1$, $R_k^{(q)}-R_l^{(q)}=R_k^{(1)}-R_l^{(1)}+\sum_{j=2}^{q}\frac{c_j}{R_{k-1}^{(j)}\cdot R_{l-1}^{(j)}}\left(R_{l-1}^{(j)}-R_{k-1}^{(j)}\right)$, $n\ge k>l\ge 0$, $q=\overline{2,N}$, і умови (7), маємо

$$\begin{aligned}|F_n-F_m|&=\left|\frac{1}{R_n^{(N)}\cdot R_m^{(N)}}\left[R_m^{(1)}-R_n^{(1)}+\sum_{j_1=2}^{N}\frac{c_{j_1}}{R_{n-1}^{(j_1)}\cdot R_{m-1}^{(j_1)}}\left(R_{n-1}^{(j_1)}-R_{m-1}^{(j_1)}\right)\right]\right|\\&\le\frac{1}{g_n\cdot g_m}\left[\left|R_m^{(1)}-R_n^{(1)}\right|+\frac{\sum_{j_1=2}^{N}|c_{j_1}|}{g_{n-1}\cdot g_{m-1}}\left|R_{n-1}^{(1)}-R_{m-1}^{(1)}\right|\right.\\&\qquad\left.+\frac{\sum_{j_1=2}^{N}\sum_{j_2=2}^{j_1}|c_{j_1}||c_{j_2}|\left|R_{m-2}^{(j_2)}-R_{n-2}^{(j_2)}\right|}{g_{n-1}g_{n-2}\cdot g_{m-1}g_{m-2}}\right].\end{aligned}$$

Через m кроків одержимо оцінку

$$|F_n - F_m| \le \frac{1}{g_n \cdot g_m}\Bigg[\left|R_m^{(1)} - R_n^{(1)}\right| + \frac{\sum_{j_1=2}^{N}|c_{j_1}|}{g_{n-1}\cdot g_{m-1}}\left|R_{n-1}^{(1)} - R_{m-1}^{(1)}\right|$$
$$+ \ldots + \frac{\sum_{j_1=2}^{N}\sum_{j_2=2}^{j_1}\ldots\sum_{j_m=2}^{j_{m-1}}|c_{j_1}||c_{j_2}|\ldots|c_{j_m}|}{\prod_{r=1}^{m} g_{m-r}g_{n-r}}\left|R_{n-m}^{(1)} - R_0^{(1)}\right|$$
$$+ \frac{\sum_{j_1=2}^{N}\sum_{j_2=2}^{j_1}\ldots\sum_{j_m=2}^{j_{m-1}}\sum_{j_{m+1}=2}^{j_m}|c_{j_1}||c_{j_2}|\ldots|c_{j_m}||c_{j_{m+1}}|}{\prod_{r=1}^{m+1} g_{m-r}\cdot g_{n-r}}\Bigg].$$

Враховуючи рівність (9), при $s = \overline{1, m+1}$ одержимо

$$\sum_{j_1=2}^{N}\sum_{j_2=2}^{j_1}\ldots\sum_{j_s=2}^{j_{s-1}}|c_{j_1}||c_{j_2}|\ldots|c_{j_s}| = \sum_{k_2+\ldots+k_N=s}|c_2|^{k_2}\ldots|c_N|^{k_N} \le \left(\sum_{j=2}^{N}|c_j|\right)^s = C^s$$

і оцінку (8). □

Теорема 1. *Нехай елементи c_j дробу (5) задовольняють умови*

$$c_1 \in G = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\arg\left(z + \frac{1}{4}\right)\right| < \pi\right\}, \quad \sum_{j=2}^{N}|c_j| = C \le \frac{\mu^2}{4},$$

де $\mu = \frac{1}{2}\left(|1+\sqrt{1+4c_1}| - |1-\sqrt{1+4c_1}|\right)$.

Тоді справджуються такі оцінки швидкості збіжності:

1) якщо $C < \dfrac{\mu^2}{4}$, *то*

$$|F - F_m| \le L_1\frac{p_1^{m+1} - p_2^{m+1}}{p_1 - p_2}, \qquad m > 0,\ p_1 \ne p_2;$$
$$|F - F_m| \le L_1(m+1)p^{m+1}, \qquad m > 0,\ p_1 = p_2 = p;$$

2) якщо $C = \dfrac{\mu^2}{4}$, *то*

$$|F - F_m| \le L_2\frac{1}{m+1}, \qquad m > 0,$$

де $L_1 = \dfrac{4|1+\sqrt{1+4c_1}|}{\mu(1-p_1)(1-p_2)}$, $L_2 = \dfrac{4|1+\sqrt{1+4c_1}|(p_1 + (1-p_1)^2)}{\mu^2(1-p_1)^3}$, $p_1 = \left|\dfrac{1-\sqrt{1+4c_1}}{1+\sqrt{1+4c_1}}\right|$,
$p_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4C/\mu^2}}{1+\sqrt{1-4C/\mu^2}}$, *$F$ — значення дробу (5).*

Доведення. Встановимо оцінки знизу для $|R_n^{(q)}|$, $n \ge 0$, $q = \overline{1, N}$. Враховуючи, що $c_1 \in G$, при $n \ge 0$ маємо

$$|R_n^{(1)}| = \left|\frac{x_1^{n+2} - y_1^{n+2}}{x_1^{n+1} - y_1^{n+1}}\right| \ge |x_1|(1-p_1) = \frac{1}{2}\left(|1+\sqrt{1+4c_1}| - |1-\sqrt{1+4c_1}|\right) = \mu,$$

де p_1, x_1, y_1 визначені аналогічно, як p, x, y у твердженні 1. Зауважимо, що $\mu = 0$ лише тоді, коли числа $1+\sqrt{1+4c_1}$ та $1-\sqrt{1+4c_1}$ є комплексно-спряженими. Цей випадок виключений умовою теореми.

Методом математичної індукції по n доведемо, що для будь-якого фіксованого q, $2 \le q \le N$, справджуються оцінки

$$|R_n^{(q)}| \ge g_n, \qquad n \ge 0, \tag{10}$$

де $g_n = \mu + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n}\dfrac{-C}{\mu}$, $n \ge 0$.

При $n = 0$ одержимо $R_0^{(q)} = 1 \ge \mu = g_0$.

Нехай нерівності (10) виконуються для кожного $n = k$. Тоді при $n = k+1$ маємо

$$|R_{k+1}^{(q)}| = \left|R_{k+1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{q}\frac{c_j}{R_k^{(j)}}\right| \ge \mu - \sum_{j=2}^{q}\frac{|c_j|}{|R_k^{(j)}|} \ge \mu - \frac{\sum_{j=2}^{q}|c_j|}{g_k} \ge \mu - \frac{C}{g_k} = g_{k+1}.$$

Для оцінки швидкості збіжності ГЛД (5) використаємо нерівність (8). Оскільки $c_1 \in G$, то згідно з твердженням 1 маємо $|R_{n-r}^{(1)} - R_{m-r}^{(1)}| \le M_1 p_1^{m-r+1}$, $n > m \ge 0$, $r \ge 0$, де $M_1 = 2|x_1|/(1-p_1)$.

Позначимо $\widehat{f}_n$ — n-тий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу (6) при $c = -C/\mu^2$; $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4C/\mu^2}}{2}$, $y_2 = \frac{1-\sqrt{1-4C/\mu^2}}{2}$ — притягувальна та відштовхувальна точки дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 + \frac{-C/\mu^2}{\omega}$. Тоді маємо $\widehat{f}_n = \dfrac{x_2^{n+2} - y_2^{n+2}}{x_2^{n+1} - y_2^{n+1}}$, $g_n = \mu \cdot \widehat{f}_n$, $n \ge 0$, та $x_2 \cdot y_2 = C/\mu^2$.

1. Оцінимо вирази $\dfrac{C^k}{\prod_{r=1}^{k} g_{n-r}\cdot g_{m-r}}$ зверху при $k = \overline{1, m+1}$. Нехай $1 \le k \le m$, тоді

$$\frac{C^k}{\prod_{r=1}^{k}(g_{n-r}\cdot g_{m-r})} = \frac{(C/\mu^2)^k}{\prod_{r=1}^{k}\left(\widehat{f}_{n-r}\cdot\widehat{f}_{m-r}\right)} \le \frac{1}{1-p_2}\left(\frac{y_2}{x_2}\right)^k = M_2^{(1)}p_2^k,$$

де $M_2^{(1)} = \dfrac{1}{1-p_2}$, $p_2 = y_2/x_2$. Аналогічну оцінку отримаємо при $k = m+1$, де $M_2^{(2)} = \dfrac{\mu x_2}{1-p_2}$. Оскільки $\mu \le 1$ і $x_2 \le 1$, то $M_2 = \max\{M_2^{(1)}, M_2^{(2)}\} = \dfrac{1}{1-p_2}$.

Якщо $p_1 \ne p_2$, то

$$|F_n - F_m| \le \frac{4}{\mu^2}\left(\sum_{k=0}^{m} M_1 p_1^{m-k+1}\cdot M_2 p_2^k + M_2 p_2^{m+1}\right) \le L_1\frac{p_1^{m+1} - p_2^{m+1}}{p_1 - p_2},$$

де $L_1 = \dfrac{4M_1M_2}{\mu^2}$.

Якщо $p_1 = p_2 = p$, то

$$|F_n - F_m| \le \frac{4}{\mu^2}\left(\sum_{k=0}^{m} M_1 p_1^{m-k+1}\cdot M_2 p_2^k + M_2 p_2^{m+1}\right) \le L_1(m+1)p^{m+1}.$$

2. Нехай $\frac{C}{\mu^2} = \frac{1}{4}$. Враховуючи, що $\widetilde{f}_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ — n-тий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу (6), де $c = -1/4$, при $1 \le k \le m$ маємо

$$\frac{C^k}{\prod_{r=1}^{k}(g_{n-r}\cdot g_{m-r})} = \frac{(C/\mu^2)^k}{\prod_{r=1}^{k}\left(\widetilde{f}_{n-r}\cdot \widetilde{f}_{m-r}\right)} = \frac{(n-k+1)(m-k+1)}{(n+1)(m+1)}.$$

Аналогічно при $k = m+1$ одержимо

$$\frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1}(g_{n-r}\cdot g_{m-r})} = \frac{\mu(C/\mu^2)^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1}\widetilde{f}_{n-r}\cdot \prod_{r=1}^{m}\widetilde{f}_{m-r}} = M_2\frac{n-m}{(n+1)(m+1)},$$

де $M_2 = \frac{\mu}{2} \le \frac{1}{2}$.

Отже, $|F_n - F_m| \le \frac{4M_1M_2}{\mu^2}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{m} p_1^{m-k+1}(n-k+1)(m-k+1)+(n-m)}{(n+1)(m+1)}$.

Перейшовши до границі при $n \to \infty$, отримаємо оцінку з пункту 2 для $|F - F_m|$. □

Теорема 2. *Нехай елементи c_j, $j = \overline{1,N}$, дробу (5) задовольняють умову $c_j \in P_j(\gamma)$, де*

$$P_j(\gamma) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| - Re\left(ze^{-\gamma i}\right) \le 2l_j\cos^2\frac{\gamma}{2}\right\}, \quad -\pi < \gamma < \pi, \quad l_j = \frac{1}{2N}\left(1 - \frac{j}{2N}\right).$$

Тоді

1. *Дріб (5) збігається.*
2. *Областю значень дробу (5) є круг $K = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{e^{-i\gamma/2}}{\cos\gamma/2}\right| \le \frac{1}{\cos\gamma/2}\right\}$.*
3. *Крім цього, якщо $|c_j| < \left(1 - \frac{j}{2N}\right)^2\cos^2\gamma/2$, $j = \overline{2,N}$, то справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|F - F_m| \le L\cdot C_{m+N-1}^{N-1}\cdot p^{m+1}, \qquad m \ge 0, \tag{11}$$

де $L = \frac{4M_1}{\cos^2\gamma/2}$; $M_1 = \frac{|1+\sqrt{1+4c_1}|(1+p_1)}{(1-p_1)^2}$; $p = \max\limits_{j=\overline{1,N}}\{p_j\}$; $p_1 = \left|\frac{1-\sqrt{1+4c_1}}{1+\sqrt{1+4c_1}}\right|$;

$p_j = \frac{|c_j|}{\left(1-\frac{j}{2N}\right)^2\cos^2\gamma/2}$, $j = \overline{2,N}$; *F — значення дробу (5).*

Доведення. Пункти 1 та 2 доведені у теоремі 2 [8]. Встановимо оцінки знизу для $|R_n^{(j)}|$, $n \ge 0$; $j = \overline{1,N}$. Оскільки $c_j \in P_j(\gamma)$, $j = \overline{1,N}$, то $R_n^{(j)} \in V_j(\gamma)$, де

$$V_j(\gamma) = \left\{z \in \mathbb{C} : Re\left(ze^{-i\gamma/2}\right) \ge \left(1 - \frac{j}{2N}\right)\cos\gamma/2\right\}.$$

Отже, $|R_n^{(j)}| \ge \left(1 - \frac{j}{2N}\right)\cos\gamma/2$.

Оскільки $R_n^{(j)} \ne 0$, $n \ge 0$; $j = \overline{1,N}$, то для оцінки швидкості збіжності дробу (5) використаємо нерівність

$$|F_{n+m} - F_n| \le \frac{1}{\left|R_{n+m}^{(N)}\right|\cdot\left|R_n^{(N)}\right|}\sum_{\substack{k_1+\dots+k_N=n+1\\ k_j\geqslant 0(j=\overline{1,N})}}\frac{|c_1|^{k_1}|c_2|^{k_2}\dots|c_N|^{k_N}}{\prod_{j=1}^{N}\prod_{r=1}^{k_j}\left(\left|R_{m+s_j-r}^{(j)}\right|\cdot\left|\hat{R}_{s_j-r}^{(j)}\right|\right)}, \tag{12}$$

де $s_j = n - \sum_{l=j+1}^{N} k_l$; $\hat{R}_n^{(q)} = \begin{cases} R_n^{(q)}, & \text{якщо } n \ge 0\\ 1, & \text{якщо } n = -1\end{cases}$, яка випливає з формули різниці підхідних дробів F_{n+m} та F_n, $n > 0$, $m > 0$.

Враховуючи твердження 1 і $c_1 \in P_1(\gamma) \subset G$, де $G = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\arg\left(\frac{1}{4}+z\right)\right| < \pi\right\}$, маємо $\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1}\left|R_{s_1+m-r}^{(1)}\right|\cdot\left|\hat{R}_{s_1-r}^{(1)}\right|} \le M_1p_1^{k_1}$, $1 \le k_1 \le n+1$.

Позначимо $\Psi_j = \frac{|c_j|}{\left|R_{s_j+m-r}^{(j)}\right|\cdot\left|\hat{R}_{s_j-r}^{(j)}\right|}$, тоді $\Psi_j \le \frac{|c_j|}{\left(1-\frac{j}{2N}\right)^2\cos^2\gamma/2} = p_j < 1$, $j = \overline{2,N}$, $\prod_{j=1}^{k_j}\Psi_j \le p_j^{k_j}$, $1 \le k_j \le m$, і $\prod_{j=1}^{m+1}\Psi_j = \left(1 - \frac{j}{2N}\right)\cos(\gamma/2)\cdot p_j^{m+1}$, $k_j = m+1$. Враховуючи, що $M_2 = \max\{1; (1 - j/(2N))\cos\gamma/2\} = 1$, маємо оцінку

$$|F_{n+m} - F_n| \le \frac{1}{\left|R_{n+m}^{(N)}\right|\cdot\left|R_n^{(N)}\right|}\sum_{k_1+k_2+\dots+k_N=n+1} M_1p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N} \le L\cdot C_{n+N-1}^{N-1}\cdot p^{n+1},$$

де $L = \frac{4M_1}{\cos^2\gamma/2}$. Перейшовши до границі при $m \to \infty$, одержимо (11). □

Встановимо оцінку швидкості збіжності в об'єднанні параболічних областей, які побудовані за схемою запропонованою в роботі [8], тобто

$$G_1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\arg(\omega + l_1)| < \pi\} \tag{13}$$

та

$$G_s = G_s(c_1, c_2, \dots, c_{s-1}) = \bigcup_{\gamma\in[\Gamma_1^{s-1},\Gamma_2^{s-1}]} P_s(\gamma), \tag{14}$$

$$P_s(\gamma) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| - Re(ze^{-\gamma i}) \le 2l_s\cos^2\frac{\gamma}{2}\right\}, \quad -\pi < \gamma < \pi, \quad l_s = \frac{1}{2N}\left(1 - \frac{s}{2N}\right),$$

де $[\Gamma_1^{s-1}, \Gamma_2^{s-1}] = \bigcap_{j=1}^{s-1}[\gamma_1^j, \gamma_2^j]$, $s = \overline{2,N}$, і $\gamma_1^j = \arccos\left(\frac{A_j+B_j}{C_j}\right)$, якщо виконується умова $\cos\alpha_j \le 1 - \frac{2l_j}{|c_j|}$, і $\gamma_1^j = -\arccos\left(\frac{A_j+B_j}{C_j}\right)$, якщо ця умова не виконується; $\gamma_2^j = \arccos\left(\frac{A_j-B_j}{C_j}\right)$, $\alpha_j = \arg c_j$, $A_j = (|c_j| - l_j)(l_j + |c_j|\cos\alpha_j)$, $B_j = |c_j||\sin\alpha_j|\sqrt{2|c_j|l_j(1+\cos\alpha_j)}$, $C_j = l_j^2 + |c_j|^2 + 2|c_j|l_j\cos\alpha_j$.

Теорема 3. *Нехай елементи c_j, $j = \overline{1,N}$, дробу* (5) *задовольняють умову $c_j \in G_j$, де G_j визначаються згідно з формулами* (13)–(14). *Тоді*

1. *Дріб* (5) *збігається.*
2. *Областю значень дробу* (5) *є об'єднання кругів $K(\Gamma_1^N) \bigcup K(\Gamma_2^N)$.*
3. *Крім цього, якщо $|c_j| < v_j$, $j = \overline{2,N}$, де $v_j = \left(1 - \frac{j}{2N}\right)^2 \min^2\{\cos(\Gamma_1^N/2); \cos(\Gamma_2^N/2)\}$, то справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|F - F_m| \leq L \cdot C_{m+N-1}^{N-1} \cdot p^{m+1}, \qquad m \geq 0, \tag{15}$$

де $L = M_1/v_N$; $M_1 = \dfrac{|1+\sqrt{1+4c_1}|(1+p_1)}{(1-p_1)^2}$; $p = \max\limits_{j=\overline{1,N}}\{p_j\}$; $p_1 = \left|\dfrac{1-\sqrt{1+4c_1}}{1+\sqrt{1+4c_1}}\right|$; $p_j = |c_j|/v_j$ $(j = \overline{2,N})$; F — значення дробу (5).

Доведення. Пункти 1 та 2 доведені в теоремі 3 [8]. Встановимо оцінки знизу для $|R_n^{(j)}|$, $n \geq 0$; $j = \overline{1,N}$. Оскільки $c_j \in G_j$, $j = \overline{1,N}$, то $R_n^{(j)} \in \bigcup\limits_{\gamma \in [\Gamma_1^N; \Gamma_2^N]} V_j(\gamma)$, де

$$V_j(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : Re\left(ze^{-\gamma i/2}\right) \geq \left(1 - \tfrac{j}{2N}\right)\cos\tfrac{\gamma}{2} \right\}.$$

Отже, справджуються оцінки $|R_n^{(j)}| \geq \sqrt{v_j}$.

Аналогічно як у попередній теоремі використаємо нерівність (12) для оцінки швидкості збіжності дробу (5). Враховуючи, що $\dfrac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1}\left|R_{s_1+m-r}^{(1)}\right| \cdot \left|\widehat{R}_{s_1-r}^{(1)}\right|} \leq M_1 p_1^{k_1}$, $1 \leq k_1 \leq m+1$, та $\Psi_j \leq \dfrac{|c_j|}{v_j} = p_j < 1$, $j = \overline{2,N}$, одержимо оцінку (15). □

Отримані умови збіжності відрізняються від раніше встановлених тим, що маємо значно ширшу область для вибору елемента c_1, яка у випадку неперервного дробу є максимально можливою. Встановлено оцінки швидкості збіжності при додаткових умовах на елементи 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

References

[1] Antonova T.M. *Multidimensional generalization of multiply parabola convergence theorem for continued fractions.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1999, **42** (4), 7–12. (in Ukrainian)

[2] Antonova T.M. *Speed of covergence for branched continued fractions of special form.* Volyn Math. Bull. 1999, **6**, 3–8. (in Ukrainian)

[3] Antonova T.M., Bodnar D.I. *The convergence regions for branched continued fractions of special form.* In: Proc. of the Intern. Conf. on Approximation Theory and its Appl. dedicated to the memory of V.K. Dzyadyk 2000, **31**, 19–32. (in Ukrainian)

[4] Antonova T.M. *On simple circular sets of absolute convergence for branched continued fractions of the special form.* Carpathian Math. Publ. 2012, **4** (2), 165–174. (in Ukrainian)

[5] Baran O. *Analogue of the Worpitzky convergence criterion for branched continued fractions of a special form.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1996, **39** (2), 35–38. (in Ukrainian)

[6] Beardon A.F. *Worpitzky's Theorem on continued fractions.* J. Comput. Appl. Math. 2001, **131** (1–2), 143–148. doi:10.1016/S0377-0427(00)00318-6

[7] Bodnar D.I. Branched continued fractions. Naukova dumka, Kyiv, 1986. (in Russian)

[8] Bodnar D.I., Bubniak M.M. *Some parabolic regions of convergence for 1-periodic branched continued fraction of special form.* Computer-integration technology: education, science, industry 2012, **9**, 4–8. (in Ukrainian)

[9] Dmytryshyn R.I. *The multidimensional generalization of g-fractions and their application.* J. Comput. Appl. Math. 2004, **164–165**, 265–284. doi: 10.1016/S0377-0427(03)00642-3

[10] Jones W.B., Thron W.J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications, Encyclopedia Math. Appl. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1980.

[11] Kuchmins'ka Kh.Yo. Two-dimensional continued fractions. Pidstryhach Institute Appl. Probl. Mech. Math., L'viv, 2010. (in Ukrainian)

[12] Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions. Atlantis Press/World Scientific, Amsterdam-Paris, 2008.

[13] Thron W.J., Waadeland H. *Modifications of continued fractions.* Lecture Notes in Mathematics. Analytic Theory of Continued fractions. 1981, **932**, 38–66.

[14] Wall H.S. Analytic Theory of Continued Fractions. Van Nostrand, New York, 1948.

Надійшло 29.04.2013

Bubniak M.M. *Truncation-error bounds for the 1-periodic branched continued fraction of special form.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 187–195.

Truncation-error bounds for the 1-periodic continued fraction of special form are established at the following conditions: if first element of the fraction belongs to complex plain with the cut $(-\infty; -1/4]$ and the sum of modules of other elements is limited by a certain number; if elements belong to their respective parabolic regions or union of that parabolic regions and all their modules, except of the first one, are limited.

Key words and phrases: 1-periodic branched continued fraction of special form, Worpitsky's criterion, union of parabolic regions.

Бубняк М.М. *Оценки скорости сходимости 1-периодической ветвящейся цепной дроби специального вида* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 187–195.

Установлены оценки сходимости 1-периодической ветвящейся непрерывной дроби специального вида при условиях: если первый элемент дроби принадлежит комплексной плоскости с разрезом $(-\infty; -1/4]$ и сумма модулей остальных элементов ограничена некоторым числом; если элементы принадлежат соответствующим параболическим областям или объединению параболических областей и модули элементов, начиная со второго, ограничены.

Ключевые слова и фразы: 1-периодическая ветвящаяся цепная дробь специального вида, критерий Ворпицкого, объединение параболических областей.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.98

VERKALETS N.B., ZAGORODNYUK A.V.

ON GEOMETRIC EXTENSION OF POLYNOMIALS ON BANACH SPACES

Verkalets N.B., Zagorodnyuk A.V. *On geometric extension of polynomials on Banach spaces.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 196–198.

We consider some questions related to Aron-Berner extensions of polynomials on infinitely dimensional complex Banach spaces, using natural extensions of their zeros.

Key words and phrases: homogeneous polynomials on Banach spaces, zeros of polynomials, Aron-Berner extension.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: nadyaverkalets@ukr.net (Verkalets N.B.), andriyzag@yahoo.com (Zagorodnyuk A.V.)

INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let X be a complex Banach space, $\mathcal{P}(X)$ be the algebra of all continuous complex valued polynomials on X and $\mathcal{P}(^nX)$ be a subspace of $\mathcal{P}(X)$ of n-homogeneous polynomials. Since every polynomial $P \in \mathcal{P}(X)$ admits an unique (up to a multiplicative constant) factorization $P = P_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot P_k^{m_k}$ in $\mathcal{P}(X)$ into irreducible polynomials, where $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, $\deg P_j > 0$, $j = 1, \ldots, k$, we can denote the *radical* of P as Rad $(P) = P_1 \cdot \ldots \cdot P_k$.

In the general case, let $J = (P_1, \ldots, P_n)$ be the ideal generated by $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}(X)$, that is

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i : \ Q_i \in \mathcal{P}(X) \right\}, \tag{1}$$

then the set Rad J is called the *radical* of J, if $P^k \in J$ for some positive integer k implies $P \in$ Rad J. For a given ideal $J \subset \mathcal{P}(X)$, $V(J)$ denotes the *zero* of J, that is, the common set of zeros of all polynomials in J.

Let G be a subset of X. Then $I(G)$ denotes the hull of G, that is the set of all polynomials in $\mathcal{P}(X)$ which vanish on G.

Ideals of the form (1) is called *finitely generated* in $\mathcal{P}(X)$. The following theorem is an analogue of the well known Hilbert Nulstellensatz for the infinite-dimension case (see [4, 5]).

Theorem 1. *Let J be a finitely generated in $\mathcal{P}(X)$. Then $I[V(J)] =$ Rad J.*

This theorem implies, in particular, that every irreducible polynomial in $\mathcal{P}(X)$ is defined (up to a multiplicative constant) by its zeros.

In this paper we consider questions related to extensions of polynomials, using their zeros. Here we will use the fact in [3] that zero set of every homogeneous polynomial on a complex infinite-dimensional Banach space X contains an infinite-dimensional linear subspace. Also, we will use the well known Aron-Berner extension of polynomials in $\mathcal{P}(X)$ to the second dual X'' and the fact that the extension operator $P \rightsquigarrow \widetilde{P}$ is a topological homomorphism of algebras $\mathcal{P}(X)$ and $\mathcal{P}(X'')$ (see [1, 2]).

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46A20, 46A22.

1 GEOMETRIC EXTENSION OF POLYNOMIALS

Let $P \in \mathcal{P}(X)$, $\dim X = \infty$. Since Ker P consists of infinite-dimensional closed linear subspaces ([3]), we can present Ker $P = \cup_\alpha V_\alpha$, where V_α are *maximal* closed linear subspaces in Ker P and α goes over a set of indexes. As usually,

$$V_\alpha^\perp = \{ f \in X' : \ f(x) = 0, \forall x \in V_\alpha \}.$$

So, $V_\alpha^{\perp\perp}$ naturally contains V_α and

$$V_\alpha^{\perp\perp} = \left\{ \varphi \in X'' : \varphi(f) = 0, \forall f \in V_\alpha^\perp \right\}.$$

Proposition 1. $V_\alpha^{\perp\perp} = V_\alpha''$.

Proof. $V_\alpha^{\perp\perp} \supset V_\alpha''$. By the Goldstain's theorem for every $\varphi \in V_\alpha''$ there is a net $(x_\beta) \in V_\alpha$ such that $x_\beta \xrightarrow{*-weak} \varphi$ that is $f(x_\beta) \to \varphi(f)$ for all $f \in X'$. Hence if $f \in V_\alpha^\perp$, then $f(x_\beta) = 0$ for all β. So, we have $\varphi(f) = 0$ and $V_\alpha^{\perp\perp} \supset V_\alpha''$.

On the other hand, if we have $\varphi \in V_\alpha^{\perp\perp}$, then $\varphi \in X''$. For any $g \in V_\alpha'$ by the Hahn-Banach theorem there exists an extension $\widetilde{g} \in X'$. Let $\widetilde{g_1}$, $\widetilde{g_2}$ be extensions of g to some elements in X', then $\widetilde{g_1} - \widetilde{g_2} = 0$ on V_α, i.e. $\widetilde{g_1} - \widetilde{g_2} \in V_\alpha^\perp$. Since $\varphi \in V_\alpha^{\perp\perp}$, then $\varphi(\widetilde{g_1} - \widetilde{g_2}) = 0$ and so, $\varphi(\widetilde{g_1}) = \varphi(\widetilde{g_2})$.

Therefore we can define

$$\varphi(g) := \varphi(\widetilde{g}),$$

where $\widetilde{g}$ is an arbitrary extension.

We have proved that $\varphi \in V_\alpha''$, which means that $V_\alpha^{\perp\perp} \subset V_\alpha''$. It follows that $V_\alpha^{\perp\perp} = V_\alpha''$. □

The main question of this paper is: *does Ker $\widetilde{P} = \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$, where $\widetilde{P}$ is the Aron-Berner extension of P?*

We have an affirmative answer for some partial cases.

Proposition 2. *Ker $\widetilde{P} \supset \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$.*

Proof. Since each $V_\alpha^{\perp\perp}$ is naturally identified with V_α'', then the restriction of $\widetilde{P}$ on $V_\alpha^{\perp\perp}$ coincide with the Aron-Berner extension of restriction of P onto V_α. But P vanishes on V_α and so, $V_\alpha^{\perp\perp} \subset$ Ker $\widetilde{P}$. □

Corollary 1. *If $\cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$ is a zero-set of a polynomial R on X'', then Ker $\widetilde{P} = \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$.*

Proof. Without lost of the generality, we can assume that R is radical. By the Proposition 2, Ker $\widetilde{P} \supset$ Ker R, that is $\widetilde{P} \in I[V(R)]$. By Theorem 1, $\widetilde{P} = RQ$ for some $Q \in \mathcal{P}(X'')$. Note that Ker $P =$ Ker $R|_X$ and Ker $P =$ Ker $R|_X \cup$ Ker $Q|_X$. So, Ker $Q|_X \subset$ Ker $P|_X$ and we have that Ker $Q \subset$ Ker R. Hence Ker $\widetilde{P} =$ Ker $RQ =$ Ker $R = \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$. □

Corollary 2. *If X is a complemented subspace in X'', then Ker $\widetilde{P} = \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$.*

Proof. Let $T : X'' \to X$ be a projection. Then T maps $V_\alpha^{\perp\perp}$ onto V_α. Let $R = P \circ T$. So $\cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp} \subset$ Ker R.

On the other hand, if $z \notin \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$, then $T(z) \notin \cup_\alpha V_\alpha$ and so $R(z) \neq 0$, that is $\cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp} = R$. By the Corollary 1, Ker $\widetilde{P} = \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$. □

Since every dual Banach space is complemented in its second dual we have the following corollary.

Corollary 3. *If X is a dual space to a Banach space, then Ker $P = \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$.*

REFERENCES

[1] Aron R.M., Berner P.D. *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings.* Bull. Soc. Math. France 1978, **106**, 3–24.

[2] Carne T.K., Cole B., Gamelin T.W. *A uniform algebra of analytic functions on a Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 1989, **314** (2), 639–659. doi:10.1090/S0002-9947-1989-0986022-0

[3] Plichko A., Zagorodnyuk A. *On automatic continuity and three problems of "The Scottish Book" concerning the boundedness of polynomials functionals.* J. Math. Anal. Appl. 1998, **220** (2), 477–494. doi:10.1006/jmaa.1997.5826

[4] Zagorodnyuk A.V. *Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces.* Contemp. Math. 2007, **435**, 381–394.

[5] Zagorodnyuk A.V. *The Nulstellensatz on infinite-dimentional complex spaces.* J. Math. Sci. 1999, **96** (2), 2951–2956. doi:10.1007/BF02169686

Received 22.08.2013

Веркалець Н.Б., Загороднюк А.В. *Геометричне продовження поліномів на банахових просторах* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — C. 196–198.

У роботі розглянуті деякі питання, пов'язані з продовженням Арона-Бернера поліномів на нескінченно вимірних комплексних банахових просторах, використовуючи природне продовження їхніх нулів.

Ключові слова і фрази: однорідні поліноми на банахових просторах, нулі поліномів, продовження Арона-Бернера.

Веркалец Н.Б., Загороднюк А.В. *Геометрическое продолжение полиномов на банаховых пространствах* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — C. 196–198.

У роботе рассмотрены некотрые вопросы, связанные с продолжением Арона-Бернера полиномов на бесконечно измеримых комплексных банаховых пространствах, используя естественное продолжение их нулей.

Ключевые слова и фразы: однородные полиномы на банаховых пространствах, нули полиномов, продолжение Арона-Бернера.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.51

ВОЛОШИН Г.А.[1], МАСЛЮЧЕНКО В.К.[2]

ТОПОЛОГІЗАЦІЯ ПРОСТОРУ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Топологізація простору нарізно неперервних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — C. 199–207.

Тут ми вводимо локально опуклу топологію $\mathcal{T}$ пошарової рівномірної збіжності на просторі $S = CC[0,1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, доводимо, що простір $(S, \mathcal{T})$ повний, неметризовний і що простір P всіх многочленів від двох змінних на $[0,1]^2$ всюди щільний в S, отже, S — сепарабельний.

Ключові слова і фрази: нарізно неперервні функції, поліноми від двох змінних, топологія пошарової рівномірної збіжності, повнота, гаусдорфовість, метризовність, сепарабельність.

[1] Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці, Україна
[2] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: galja.vlshin@gmail.com (Волошин Г.А.)

1. Топологія пошарової рівномірної збіжності. Розглянемо простір $S = CC[0,1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, заданих на квадраті $Q = [0,1]^2$, який є лінійним підпростором простору $\mathbb{R}^Q$ всіх дійснозначних функцій на Q. Для функції $f : Q \to \mathbb{R}$ і точки $p = (x,y) \in Q$ покладемо, як звичайно, $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$. Нехай $\|\cdot\|_\infty$ — це рівномірна норма на просторі $C[0,1]$ всіх неперервних функцій $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, яка визначається формулою

$$\|g\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |g(x)|.$$

Введемо на просторі S природну сім'ю переднорм, покладаючи

$$\|f\|^x = \|f^x\|_\infty \text{ для кожного } x \in [0,1] \quad \text{і} \quad \|f\|_y = \|f_y\|_\infty \text{ для кожного } y \in [0,1]$$

для довільної функції $f \in S$. Нехай

$$\mathcal{P}_X = \{\|\cdot\|^x : 0 \le x \le 1\}, \quad \mathcal{P}_Y = \{\|\cdot\|_y : 0 \le y \le 1\} \quad \text{і} \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}_X \cup \mathcal{P}_Y.$$

Розглянемо на просторі S локально опуклу топологію $\mathcal{T}$, що породжена сукупністю переднорм $\mathcal{P}$. Як це випливає з загальних побудов [4, с. 27], базу околів нуля топології $\mathcal{T}$ будуть утворювати кулі

$$B_{\tau,\sigma,\varepsilon} = B_{x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m;\varepsilon} = \{f \in S : \max\{\|f\|^{x_1},\dots,\|f\|^{x_n},\|f\|_{y_1},\dots,\|f\|_{y_m}\} \le \varepsilon\},$$

де $\tau = \{x_1,\dots,x_n\}$, $\sigma = \{y_1,\dots,y_m\}$ — довільні скінченні підмножини відрізка $[0,1]$ і ε — довільне додатне число (якщо $\tau = \sigma = \varnothing$, то ми вважаємо, що $B_{\tau,\sigma,\varepsilon} = S$ для кожного $\varepsilon > 0$). Легко зрозуміти, що сітка $(f_\kappa)_{\kappa\in K}$ елементів f_κ з S буде збігатися до функції f з S

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 65D15.

тоді і тільки тоді, коли всі x-розрізи f_κ^x рівномірно на $[0,1]$ збігаються до x-розрізу f^x, а всі y-розрізи $(f_\kappa)_y$ рівномірно на $[0,1]$ збігаються до y-розрізу f_y, тобто

$$(\forall x \in [0,1])(f_\kappa^x \rightrightarrows f^x \text{ на } [0,1]) \quad \text{і} \quad (\forall y \in [0,1])((f_\kappa)_y \rightrightarrows f_y \text{ на } [0,1]).$$

Тому топологію $\mathcal{T}$ на S ми будемо називати *топологією пошарової рівномірної збіжності.*

В цій статті ми вивчимо деякі властивості локально опуклого простору $S = (S, \mathcal{T})$, доведемо, що він повний, неметризовний і що його лінійний підпростір $P = P[0,1]^2$ всіх многочленів

$$g(x,y) = \sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k} x^j y^k$$

від двох змінних на квадраті Q і простір $C = C[0,1]^2$ всіх сукупно неперервних функцій $h : Q \to \mathbb{R}$ всюди щільні в S, звідки отримаємо, що простір S сепарабельний. Це лише перші кроки у вивченні нового топологічного векторного простору S, і дослідження його подальших властивостей (бочковість, борнологічність, тощо) стане предметом найближчого майбутнього.

2. Повнота простору S. Нагадаємо [4, с. 61], що фундаментальна сітка в топологічному векторному просторі (коротко: ТВП) T — це така сітка $(t_\kappa)_{\kappa \in K}$, що для кожного околу нуля U в T існує такий елемент $\kappa_0 \in K$, що для всіх таких κ' і κ'' з K, що $\kappa' \geq \kappa_0$ і $\kappa'' \geq \kappa_0$, маємо $t_{\kappa'} - t_{\kappa''} \in U$. ТВП T називається *повним*, якщо в ньому кожна фундаментальна сітка $(t_\kappa)_{\kappa \in K}$ є збіжною, тобто існує такий елемент $t \in T$, що для кожного околу нуля U існує таке $\kappa_0 \in K$, що для довільних $\kappa \geq \kappa_0$ різниця $t_\kappa - t$ належить U.

Теорема 1. *ТВП S з топологією пошарової рівномірної збіжності $\mathcal{T}$ є повним.*

Доведення. Нехай $(f_\kappa)_{\kappa \in K}$ — фундаментальна сітка в S. Тоді [4, с. 62]

$$(\forall x \in [0,1])(\|f_{\kappa'} - f_{\kappa''}\|^x \to 0) \quad \text{і} \quad (\forall y \in [0,1])(\|f_{\kappa'} - f_{\kappa''}\|_y \to 0).$$

З повноти простору $C_u[0,1] = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ випливає, що для кожного $x \in [0,1]$ існує така функція $f^x \in C[0,1]$, що $f_\kappa^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$, і для кожного $y \in [0,1]$ існує така функція $f_y \in C[0,1]$, що $(f_\kappa)_y \rightrightarrows f_y$ на $[0,1]$. Зокрема, для довільних точок x і y з $[0,1]$ будемо мати

$$f^x(y) = \lim f_\kappa^x(y) = \lim f_\kappa(x,y) = \lim (f_\kappa)_y(x) = f_y(x).$$

Тому формулою

$$f(x,y) = f^x(y) = f_y(x)$$

визначається функція $f : Q \to \mathbb{R}$, у якої f^x — це її вертикальні x-розрізи $f(x,\cdot)$ для кожного $x \in [0,1]$, а f_y — це її горизонтальні y-розрізи $f(\cdot,y)$ для кожного $y \in [0,1]$. За побудовою функції f^x і f_y неперервні, отже, f — це нарізно неперервна функція, тобто $f \in S$. Оскільки

$$\|f_\kappa - f\|^x = \|f_\kappa^x - f^x\|_\infty \to 0 \quad \text{і} \quad \|f_\kappa - f\|_y = \|(f_\kappa)_y - f_y\|_\infty \to 0$$

для довільних x і y з $[0,1]$, то $f_\kappa \to f$ в S і, таким чином, фундаментальна сітка $(f_\kappa)_{\kappa \in K}$ збігається в S, що і дає повноту простору S. □

3. Гаусдорфовість і неметризовність простору S. Нагадаємо [4, с. 57], що ТВП T буде метризовним тоді і тільки тоді, коли він гаусдорфовий і в ньому існує не більш ніж зліченна база околів нуля. Гаусдорфовість полінормованого простору (T, P) рівносильна тому, що для кожної ненульової точки t_0 з T існує така переднорма $p_0 \in P$, що $p_0(t_0) > 0$ [4, с. 29].

Ми будемо використовувати поняття хреста $xp(E)$ підмножини E добутку $X \times Y$. Визначимо проекції $pr_X : X \times Y \to X$ і $pr_Y : X \times Y \to Y$, поклавши $pr_X(x,y) = x$ і $pr_Y(x,y) = y$ для довільної точки $(x,y) \in X \times Y$. Нехай $A = pr_X(E)$ і $B = pr_Y(E)$. *Хрестом множини E* в $X \times Y$ називається множина $xp(E) = (A \times Y) \cup (X \times B)$.

Теорема 2. *Топологічний векторний простір S є гаусдорфовим.*

Доведення. Нехай f_0 — ненульова функція з S. Тоді існує така точка $(x_0, y_0) \in Q$, що $f(x_0, y_0) \neq 0$. В такому разі $\|f_0\|^{x_0} \geq |f(x_0,y_0)| > 0$ та $\|f_0\|_{y_0} \geq |f(x_0,y_0)| > 0$, що і дає нам гаусдорфовість S. □

Теорема 3. *Топологічний векторний простір S неметризовний.*

Доведення. Розглянемо довільну послідовність куль $B_n = B_{\tau_n, \sigma_n, \varepsilon_n}$ у просторі S, де τ_n і σ_n — скінченні підмножини відрізка $[0,1]$, а $\varepsilon_n > 0$, і покажемо, що система $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ не є базою околів нуля в S. Справді, множини $\tau = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n$ і $\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ не більш, ніж зліченні, а відрізок $[0,1]$ за теоремою Кантора незліченний. Тому існують точки $x_0 \in [0,1] \setminus \tau$ і $y_0 \in [0,1] \setminus \sigma$. Розглянемо кулю

$$B = B_{x_0; y_0; 1} = \{f \in S : \max\{\|f\|^{x_0}, \|f\|_{y_0}\} \leq 1\}$$

і покажемо, що $B_n \not\subseteq B$ для кожного n. Справді, розглянемо хрест $E = xp(\tau_n \times \sigma_n) = (\tau_n \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \sigma_n)$ добутку $\tau_n \times \sigma_n$, точку $p_0 = (x_0, y_0)$ і покладемо $F = E \cup \{p_0\}$. Множина F, очевидно, замкнена в квадраті Q. Визначимо функцію $f_0 : F \to \mathbb{R}$, покладаючи $f_0(p) = 0$, якщо $p \in E$ і $f_0(p_0) = 2$. Оскільки $p_0 \notin E$, адже і $x_0 \notin \tau_n$, і $y_0 \notin \sigma_n$, то така функція коректно визначена і неперервна. За теоремою Тітце-Урисона [2, с. 116] існує така неперервна функція $f : Q \to \mathbb{R}$, що $f|_F = f_0$. Для цієї функції $\|f\|^x = 0$ і $\|f\|_y = 0$ для кожного $x \in \tau_n$ і $y \in \sigma_n$, отже, $f \in B_n$. Але

$$\|f\|^{x_0} \geq |f(x_0,y_0)| = 2 \quad \text{і} \quad \|f\|_{y_0} \geq |f(x_0,y_0)| = 2,$$

тому $f \notin B$.

Таким чином, $B_n \not\subseteq B$ для кожного n. Тому система $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ не утворює бази околів нуля в S. Звідси негайно випливає, що не більш, ніж зліченної бази околів нуля в S не існує, отже, S — неметризовний простір. □

Нехай A і B — довільні підмножини відрізка $[0,1]$ і $\mathcal{T}_{A,B}$ — локально опукла топологія на S, яка породжена сукупністю передн орм $\mathcal{P}_{A,B} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B$, де $\mathcal{P}_A = \{\|\cdot\|^x : x \in A\}$ і $\mathcal{P}_B = \{\|\cdot\|_y \in B\}$.

Теорема 4. *Нехай A, B, C, D — підмножини відрізка $[0,1]$ і $(A,B) \neq (C,D)$. Тоді $\mathcal{T}_{A,B} \neq \mathcal{T}_{C,D}$.*

Доведення. Припустимо, наприклад, що існує точка $x_0 \in A \backslash C$. Розглянемо кулю $B_0 = B_{x_0;\varnothing;1}$, яка є околом нуля в топології $\mathcal{T}_{A,B}$ і покажемо, що вона не є околом нуля в топології $\mathcal{T}_{C,D}$. Справді, нехай τ і σ — довільні скінченні підмножини множин C і D відповідно, ε — довільне додатне число і $B = B_{\tau,\sigma,\varepsilon}$ — базисний окіл нуля в топології $\mathcal{T}_{C,D}$. Покажемо, що $B \not\subseteq B_0$. Розглянемо замкнену в квадраті Q множину $F = E \cup (\{x_0\} \times [0,1])$, де $E = xp(\tau \times \sigma)$.

Виберемо яку-небудь точку $y_0 \in [0,1] \backslash \sigma$. Існує така неперервна функція $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, що $g(y_0) = 2$ і $g(y) = 0$ для кожного $y \in \sigma$, адже множина $\sigma \cup \{y_0\}$ скінченна, а тому замкнена в $[0,1]$, і $y_0 \notin \sigma$.

Визначимо функцію $h : F \to \mathbb{R}$, покладаючи $h(p) = 0$ на E і $h(x_0, y) = g(y)$ для кожного y з $[0,1]$. Оскільки $x_0 \notin \tau$ і $g(y) = 0$ на σ, то це визначення функції h коректне і h — неперервна функція, адже її звуження $h|_E$ і $h|_{\{x_0\}\times[0,1]}$ на обидві замкнені множини E і $\{x_0\} \times [0,1]$, які в об'єднанні дають F, є неперервними. За теоремою Тітце-Урисона існує така неперервна функція $f : Q \to \mathbb{R}$, що $f|_F = h$. Тоді $f \in B$, бо $f|_E = 0$, отже, $f^x = 0$ і $f_y = 0$ для довільних $x \in \tau$ і $y \in \sigma$, а тому $\|f\|^x = 0 < \varepsilon$ і $\|f\|_y = 0 < \varepsilon$, як тільки $x \in \tau$ і $y \in \sigma$. Але $f \notin B_0$, бо $\|f\|^{x_0} = \|f^{x_0}\|_\infty = \|g\|_\infty \geq |g(y_0)| = 2 > 1$.

Ми показали, що окіл нуля B_0 в топології $\mathcal{T}_{A,B}$ не є околом нуля в топології $\mathcal{T}_{C,D}$, отже, $\mathcal{T}_{A,B} \neq \mathcal{T}_{C,D}$. Так само розглядаються і інші логічно можливі випадки $C \backslash A \neq \varnothing$, $B \backslash D \neq \varnothing$ чи $D \backslash B \neq \varnothing$. □

Наступний результат доповнює теорему 2.

Теорема 5. *Топологічний векторний простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ буде гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли $\overline{A} = [0,1]$ або $\overline{B} = [0,1]$.*

Доведення. Нехай, наприклад, $\overline{A} = [0,1]$ і f — ненульова функція з S. Тоді існує така точка $p_0 = (x_0, y_0) \in Q$, що $f(p_0) \neq 0$. В такому разі і $f_{y_0}(x) \neq 0$ в деякому околі U точки x_0 в $[0,1]$. З умови $\overline{A} = [0,1]$ випливає, що існує така точка $a \in A$, що $a \in U$. Тоді $f^a(y_0) = f_{y_0}(a) \neq 0$, а тому $\|f\|^a = \|f^a\|_\infty \geq |f^a(y_0)| > 0$, що і дає нам гаусдорфовість $(S, \mathcal{T}_{A,B})$.

Навпаки, нехай $\overline{A} \neq [0,1]$ і $\overline{B} \neq [0,1]$. Тоді існує така точка $p_0 = (x_0, y_0) \in Q$, що $x_0 \notin \overline{A}$ і $y_0 \notin \overline{B}$. Розглянемо хрест $E = xp(\overline{A} \times \overline{B})$ добутку $\overline{A} \times \overline{B}$, який є замкненою множиною в Q. Оскільки $x_0 \notin \overline{A}$ і $y_0 \notin \overline{B}$, то точка $p_0 = (x_0, y_0) \notin E$. З повної регулярності квадрата Q випливає, що існує така неперервна функція $f : Q \to [0,1]$, що $f(p_0) = 1$ і $f(p) = 0$ на E. Для кожної точки $x \in A$ чи $y \in B$ будемо мати $\|f\|^x = 0$ і $\|f\|_y = 0$, бо тоді $\{x\} \times [0,1] \subseteq E$ і $[0,1] \times \{y\} \subseteq E$, отже, $f^x = 0$ і $f_y = 0$. Але $f \neq 0$, бо $f(p_0) = 1$. Це і доводить, що простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ не гаусдорфовий. □

Наступний результат розвиває теорему 3.

Теорема 6. *Топологічний векторний простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ буде метризовним тоді і тільки тоді, коли обидві множини A і B не більш, ніж зліченні, і $\overline{A} = [0,1]$ або $\overline{B} = [0,1]$.*

Доведення. Достатність. Нехай A і B — не більш ніж зліченні на відрізку $[0,1]$ множини, причому одна з них всюди щільна в $[0,1]$. Сукупність переднорм $\mathcal{P}_{A,B} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B$ буде зліченною, а тому простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ має зліченну базу околів нуля. Крім того, він гаусдорфовий за теоремою 5. Отже, цей простір метризовний.

Необхідність. Якщо $\overline{A} \neq [0,1]$ і $\overline{B} \neq [0,1]$, то простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ не гаусдорфовий, отже, не метризовний. Припустимо, що хоча б одна з множин A чи B, скажімо A, незліченна. Покажемо, що тоді простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ не має не більш ніж зліченної бази околів нуля. Для цього розглянемо будь-яку послідовність куль $B_n = B_{\tau_n,\sigma_n,\varepsilon_n}$, де τ_n і σ_n — скінченні підмножини відповідно множин A і B. Множина $\tau = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tau_n$ не більш ніж зліченна, тому існує такий елемент x_0, що $x_0 \in A$ і $x_0 \notin \tau$. Розглянемо окіл нуля $B = B_{\{x_0\};\varnothing;1}$ в $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ і покажемо, що $B_n \not\subseteq B$ для кожного n.

Для даного номера n візьмемо будь-яку точку $y_0 \in [0,1] \backslash \sigma_n$ і побудуємо таку неперервну функцію $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, що $g(y_0) = 2$ і $g(y) = 0$ при $y \in \sigma_n$. Як і в доведенні теореми 4, легко побудувати таку неперервну функцію $f : Q \to \mathbb{R}$, що $f(x_0, y) = g(y)$ на $[0,1]$ і $f|_{xp(\tau_n \times \sigma_n)} = 0$. Тоді $f \in B_n \backslash B$ і теорема доведена. □

4. Рівномірне наближення неперервної функції многочленом з даними значеннями. Тепер ми беремо курс на доведення рівності $\overline{P} = S$. Це можна зробити двома способами: складнішим, але цікавішим, бо на цьому шляху нам потрібно довести твердження, які цікаві самі по собі, і простішим, але нуднішим через свою простоту. Історично спочатку виник перший спосіб, який відображений у тезах [3], а потім другий, про який іде мова в тезах [1].

Почнемо з однієї цікавої теореми, яка використовується при доведенні рівності $\overline{P} = S$ першим способом.

Теорема 7. *Нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $x_1, \dots, x_n$ — різні точки з відрізка $[0,1]$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує такий многочлен $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, де $g(x_k) = f(x_k)$ при $k = 1, \dots, n$ і $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$.*

Доведення. Розглянемо при $k = 1, \dots, n$ многочлени

$$\Phi_k(x) = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} (x - x_i) \quad \text{і} \quad \varphi_k(x) = \frac{\Phi_k(x)}{\Phi_k(x_k)},$$

для яких $\varphi_k(x_k) = 1$ і $\varphi_k(x_i) = 0$ при $i \neq k$. Функція

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x)|,$$

зрозуміло, неперервна на $[0,1]$, отже, існує $\|\gamma\|_\infty = \max\limits_{0\leq x\leq 1} \gamma(x)$. Оскільки $\|\gamma\|_\infty \geq \gamma(x_k) = 1$ для кожного $k = 1, \dots, n$, зокрема, $\|\gamma\|_\infty \geq \gamma(x_1) = 1$, то $\|\gamma\|_\infty \geq 1$. Тому ми можемо розглянути число $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2\|\gamma\|_\infty}$, для якого, очевидно, виконується нерівність $0 < \varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

За класичною теоремою Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій многочленами існує такий многочлен $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, що $\|p - f\|_\infty \leq \varepsilon_0$. За поправками $\alpha_k = f(x_k) - p(x_k)$ побудуємо многочлен

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x),$$

для якого $q(x_k) = \alpha_k$ при $k = 1, \dots, n$. Зауважимо, що

$$|\alpha_k| = |f(x_k) - p(x_k)| \leq \|f - p\|_\infty \leq \varepsilon_0$$

для кожного $k = 1, \ldots, n$, тому

$$|q(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||\varphi_k(x)| \leq \varepsilon_0 \gamma(x) \leq \varepsilon_0 \|\gamma\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2\|\gamma\|_\infty} \cdot \|\gamma\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2}$$

для кожного x з $[0,1]$, отже, $\|q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Для многочлена $g(x) = p(x) + q(x)$ будемо мати, що $g(x_k) = p(x_k) + q(x_k) = p(x_k) + \alpha_k = f(x_k)$ для кожного $k = 1, \ldots, n$, причому

$$\|g - f\|_\infty = \|q + p - f\|_\infty \leq \|q\|_\infty + \|p - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

5. Одна інтерполяційна теорема для многочленів. Далі нам потрібен буде один результат з тез [3]. Ми подамо його з доведенням, оскільки в [3] зроблені лише вказівки.

Теорема 8. *Нехай K — довільне поле, $x_1, \ldots, x_n$ — різні точки з K і $y_1, \ldots, y_m$ — різні точки з K, $p_1(y), \ldots, p_n(y)$ — многочлени з $K[y]$, $q_1(x), \ldots, q_m(x)$ — многочлени з $K[x]$, причому*

$$p_k(y_j) = q_j(x_k) \quad \text{для всіх} \quad k = 1, \ldots, n \quad і \quad j = 1, \ldots, m.$$

Тоді існує такий многочлен $f(x, y)$ з $K[x, y]$, що $f(x_k, y) = p_k(y)$ і $f(x, y_j) = q_j(x)$ для довільних x і y з K та $k = 1, \ldots, n$ і $j = 1, \ldots, m$.

Доведення. Крім многочленів $\varphi_k(x)$, породжених точками $x_1, \ldots, x_n$, які ми розглядали в доведенні попередньої теореми, і для яких

$$\varphi_k(x_i) = \delta_{k,i} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases}$$

розглянемо і такі ж многочлени $\psi_j(x)$, які породжені вже точками $y_1, \ldots, y_m$, і для яких $\psi_j(y_i) = \delta_{j,i}$.

Для многочлена

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^{n} p_k(y) \varphi_k(x)$$

будемо мати, що $g(x_k, y) = p_k(y)$ на K для кожного $k = 1, \ldots, n$. Розглянемо многочлени

$$\widetilde{q}_j(x) = q_j(x) - g(x, y_j) \qquad і \qquad h(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{q}_j(x) \psi_j(y).$$

Зрозуміло, що $h(x, y_j) = \widetilde{q}_j(x)$ на K для кожного $j = 1, \ldots, m$.

Нарешті розглянемо многочлен

$$f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$$

і покажемо, що він і є шуканим. Зауважимо спочатку, що

$$\widetilde{q}_j(x_k) = q_j(x_k) - g(x_k, y_j) = q_j(x_k) - p_k(y_j) = 0$$

для довільних j і k, тому

$$h(x_k, y) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{q}_j(x_k) \psi_j(y) = 0$$

для кожного $k = 1, \ldots, n$. В такому разі

$$f(x_k, y) = g(x_k, y) + h(x_k, y) = p_k(y) + 0 = p_k(y)$$

на K для кожного $k = 1, \ldots, n$. З іншого боку

$$f(x, y_j) = g(x, y_j) + h(x, y_j) = g(x, y_j) + \widetilde{q}_j(x) = q_j(x)$$

на K для кожного $j = 1, \ldots, m$. Теорему доведено. □

6. Щільність підпростору многочленів у просторі нарізно неперервних функцій. З теорем 7 і 8 ми виведемо такий результат.

Теорема 9. *Простір $P = P[0,1]^2$ всіх многочленів*

$$g(x, y) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{j,k} x^j y^k$$

від двох змінних x і y з дійсними коефіцієнтами $a_{j,k}$ на квадраті Q всюди щільний у просторі S з топологією пошарової рівномірної збіжності.

Доведення. Нехай $f \in S$ і $B = B_{\tau,\sigma,\varepsilon}$ — довільний базисний окіл нуля в S. Покажемо, що існує такий многочлен $g \in P$, що $g - f \in B$. Нехай $\tau = \{x_1, \ldots, x_n\}$ і $\sigma = \{y_1, \ldots, y_m\}$, де $x_k \neq x_j$ і $y_k \neq y_j$ при $k \neq j$. За теоремою 7 для кожного $k = 1, \ldots, n$ існує такий многочлен $p_k(y)$, що $\|f^{x_k} - p_k\|_\infty \leq \varepsilon$ і $p_k(y_j) = f^{x_k}(y_j)$ для кожного $j = 1, \ldots, m$, і так само для кожного $j = 1, \ldots, m$ існує такий многочлен $q_j(x)$, що $\|f_{y_j} - q_j\|_\infty \leq \varepsilon$ і $q_j(x_k) = f_{y_j}(x_k)$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Оскільки

$$p_k(y_j) = f^{x_k}(y_j) = f(x_k, y_j) = f_{y_j}(x_k) = q_j(x_k)$$

для довільних j і k, то за теоремою 8 існує такий многочлен $g(x, y)$ з P, що $g(x_k, y) = p_k(y)$ і $g(x, y_j) = q_j(x)$ для всіх x і y з $[0,1]$ і довільних $k = 1, \ldots, n$ і $j = 1, \ldots, m$. Для цього многочлена будемо мати

$$\|f - g\|^{x_k} = \|f^{x_k} - g^{x_k}\|_\infty = \|f^{x_k} - p_k\|_\infty \leq \varepsilon$$

і

$$\|f - g\|_{y_j} = \|f_{y_j} - g_{y_j}\|_\infty = \|f_{y_j} - q_j\|_\infty \leq \varepsilon,$$

отже, $g - f \in B$. Це показує, що $f \in \overline{P}$, отже, $\overline{P} = S$. □

7. Інший спосіб доведення рівності $\overline{P} = S$ і сепарабельність простору S. Ми довели рівність $\overline{P} = S$, використавши теорему Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ на відрізку. Але є й інша теорема Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ від двох змінних на квадраті $Q = [0,1]^2$. Саме її ми використаємо при іншому доведенні рівності $\overline{P} = S$.

Почнемо з такого простого спостереження.

Теорема 10. *$\overline{P} = \overline{C}$ у просторі S.*

Доведення. Зрозуміло, що $\overline{P} \subseteq \overline{C}$, бо $P \subseteq C$. Доведемо, що і $\overline{C} \subseteq \overline{P}$. Для функції $\varphi \in C$ ми покладаємо $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{p\in Q} |\varphi(p)|$.

Нехай $f \in \overline{C}$, $x_1, \dots, x_n$ — різні точки з $[0,1]$, $y_1, \dots, y_m$ — різні точки з $[0,1]$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує така функція $g \in C$, що $\|f-g\|^{x_k} \le \frac{\varepsilon}{2}$ при $k = 1, \dots, n$ і $\|f-g\|_{y_j} \le \frac{\varepsilon}{2}$ при $j = 1, \dots, m$. За теоремою Вейєрштрасса для функцій від двох змінних існує такий многочлен $h \in P$, що $\|g-h\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$\|f-h\|^{x_k} \le \|f-g\|^{x_k} + \|g-h\|^{x_k} \le \frac{\varepsilon}{2} + \|g-h\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

і

$$\|f-h\|_{y_j} \le \|f-g\|_{y_j} + \|g-h\|_{y_j} \le \frac{\varepsilon}{2} + \|g-h\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це показує, що $f \in \overline{P}$. □

Теорема 11. $\overline{C} = S$.

Доведення. Нехай $f \in S$, τ і σ — скінченні підмножини відрізка [0,1] і $\varepsilon > 0$. Розглянемо хрест

$$E = xp(\tau \times \sigma) = (\tau \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \sigma).$$

Очевидно, що E — це замкнена підмножина квадрата Q. Звуження $f|_E$ буде сукупно неперервною функцією на множині E, бо f — нарізно неперервна функція, а тому всі звуження $f|_{[0,1]\times\{y\}}$ і $f|_{\{x\}\times[0,1]}$ неперервні, крім того, всі множини $\Delta_y = [0,1] \times \{y\}$ і $\Delta^x = \{x\} \times [0,1]$ замкнені в E і E — це скінченне об'єднання множин такого типу, а саме, $E = (\bigcup\limits_{x\in\tau} \Delta^x) \cup (\bigcup\limits_{y\in\sigma} \Delta_y)$. За теоремою Тітце-Урисона існує така функція $g \in C$, що $g|_E = f|_E$. Тоді $g^x = f^x$ для всіх $x \in \tau$ і $g_y = f_y$ для всіх $y \in \sigma$, а значить

$$\|g-f\|^x = \|g^x - f^x\|_\infty = 0 < \varepsilon \quad \text{для всіх} \quad x \in \tau$$

і

$$\|g-f\|_y = \|g_y - f_y\|_\infty = 0 < \varepsilon \quad \text{для всіх} \quad y \in \sigma.$$

Звідси випливає, що $f \in \overline{C}$.

З теорем 10 і 11 негайно отримуємо рівність $\overline{P} = S$. □

Теорема 12. *Простір S з топологією пошарової рівномірної збіжності сепарабельний.*

Доведення. Розглянемо множину R всіх многочленів

$$r(x,y) = \sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k} x^j y^k$$

на квадраті Q з раціональними коефіцієнтами $a_{j,k}$. Нескладно переконатися у тому, що множина R злічення.

Оскільки $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, то, як легко перевірити, для довільного $\varepsilon > 0$ і кожного многочлена g з P існує такий многочлен $r \in R$, що $\|g-r\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}$. За теоремою 9 для кожної функції $f \in S$, довільних точок $x_1, \dots, x_n$ і $y_1, \dots, y_m$ з $[0,1]$ існує такий многочлен $g \in P$, що

$\|f-g\|^{x_k} \le \frac{\varepsilon}{2}$ і $\|f-g\|_{y_j} \le \frac{\varepsilon}{2}$ для $k = 1, \dots, n$ і $j = 1, \dots, m$. Знайшовши для цього многочлена $g \in P$ відповідний многочлен $r \in R$, ми отримаємо, що

$$\|f-r\|^{x_k} = \|f^{x_k} - r^{x_k}\|_\infty \le \|f^{x_k} - g^{x_k}\|_\infty + \|g^{x_k} - r^{x_k}\|_\infty \le \|f-g\|^{x_k} + \|g-r\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

і аналогічно

$$\|f-r\|_{y_j} \le \|f-g\|_{y_j} + \|g-r\|_\infty \le \varepsilon$$

для довільних $k = 1, \dots, n$ і $j = 1, \dots, m$. Тому $\overline{R} = S$, отже, S — сепарабельний простір. □

Автори висловлюють вдячність А.В. Загороднюку за стимулюючу участь у обговореннях і корисні пропозиції.

References

[1] Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. On sequential closure of polynomials in the space of separately continuous functions. In: Proc. of the Sci. Conf. "Algebra, Topology, Analysis, Stochastics", Mykulychyn, Ukraine, September 20-23, 2012, Ivano-Frankivsk, 2012, 3–5. (in Ukrainian)

[2] Engelking P. General Topology. Mir, Moskow, 1986. (in Russian)

[3] Maslyuchenko V., Voloshyn H. Closure of the set of polynomials in the space of separately continuous functions. In: Proc. of the Intern. Conf. dedicated to the 120th anniversary of S. Banach, Lviv, Ukraine, September 17–21, 2012, Lviv, 2012, 97.

[4] Maslyuchenko V.K. First types of topological vector spaces. Ruta, Chernivtsi, 2002. (in Ukrainian)

Надійшло 03.01.2013

Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *The topologization of the space of separately continuous functions.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 199–207.

Here we introduce locally convex topology $\mathcal{T}$ of the layer uniform convergence on the space $S = CC[0,1]^2$ of all separately continuous functions $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, we prove that the space $(S, \mathcal{T})$ is complete and it is not metrizable one, the space P of all polynomials of two variables on $[0,1]^2$ is everywhere dense in S, and so, S is separable.

Key words and phrases: separately continuous functions, polynomials of two variables, topology of the layer uniform convergence, completeness, Hausdorff property, metrizability, separability.

Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Топологизация пространства раздельно непрерывных функций* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 199–207.

Здесь мы вводим локально выпуклую топологию $\mathcal{T}$ послойной равномерной сходимости на пространстве $S = CC[0,1]^2$ всех раздельно непрерывных функций $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, доказываем, что пространство $(S, \mathcal{T})$ полно, неметризируемо и что пространство P всех многочленов от двух переменных на $[0,1]^2$ всюду плотно в S, следовательно S — сепарабельно.

Ключевые слова и фразы: раздельно непрерывные функции, многочлены от двух переменных, топология послойной равномерной сходимости, полнота, гаусдорфовость, метризуемость, сепарабельность.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.53

Глова Т.Я.[1], Філевич П.В.[2]

ПРО ОДНУ ОЦІНКУ R-ТИПУ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ТА ЇЇ ТОЧНІСТЬ

Глова Т.Я., Філевич П.В. *Про одну оцінку R-типу цілого ряду Діріхле та її точність* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 208–216.

Нехай (λ_n) — невід'ємна зростаюча до $+\infty$ послідовність, $\tau = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n}$, а ρ — додатне число. З класичної теореми Ж. Валірона випливає, що для кожного цілого ряду Діріхле вигляду $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ правильна оцінка

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln\sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}}{e^{\rho\sigma}} \le e^{\rho\tau} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n}{e\rho}|a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}.$$

В роботі доведено точність цієї оцінки.

Ключові слова і фрази: цілий ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, R-тип.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
[2] Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: hlova_taras@ukr.net (Глова Т.Я.), filevych@mail.ru (Філевич П.В.)

Вступ

Нехай Λ — клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$. Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ через $\mathcal{D}(\lambda)$ позначимо клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

які не зводяться до експоненціальних поліномів, і нехай

$$\tau(\lambda) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

Покладемо $\mathcal{D} = \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{D}(\lambda)$. Максимум модуля і максимальний член ряду (1) визначимо відповідно за рівностями

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}, \qquad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\},$$

де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, і для кожного $\rho \in (0, +\infty)$ (надалі ρ вважаємо фіксованим) покладемо

$$T(F) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln M(\sigma, F)}{e^{\rho\sigma}}, \qquad t(F) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{e^{\rho\sigma}}, \qquad K(F) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n}{e\rho}|a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}.$$

Величина $T(F)$ називається [2, с. 178] R-типом (типом за Ріттом) ряду F. З нерівності $M(\sigma, F) \ge \mu(\sigma, F)$ (аналог нерівності Коші) випливає, що $T(F) \ge t(F)$. Крім того, легко

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B50, 30D10, 30D15, 30D20.

довести (див. нижче лему 5), що $t(F) = K(F)$ для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$. Отже, завжди $T(F) \ge K(F)$.

Ж.Ф. Рітт [5] довів, що умова $\tau(\lambda) = 0$ є достатньою для того, щоб R-тип кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ можна було обчислити за формулою $T(F) = K(F)$. Зазначимо, що твердження Ж.Ф. Рітта випливає з наступної теореми Ж. Валірона [9] (див. також [2, с. 184], [4], [1]): *якщо $A > 0$ і $\tau(\lambda) < A$, то для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ виконується співвідношення*

$$M(\sigma, F) = o(\mu(\sigma + A, F)), \quad \sigma \to +\infty. \tag{2}$$

Справді, використовуючи (2), отримуємо

$$T(F) \le \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln \mu(\sigma + A, F)}{e^{\rho\sigma}} = e^{\rho A} \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln \mu(\sigma + A, F)}{e^{\rho(\sigma+A)}} = e^{\rho A} t(F) = e^{\rho A} K(F).$$

З довільності $A > \tau(\lambda)$ випливає, що

$$T(F) \le e^{\rho\tau(\lambda)} K(F), \tag{3}$$

а тому $T(F) = K(F)$ за умови $\tau(\lambda) = 0$. Крім того, якщо $\tau(\lambda) < +\infty$ і $K(F) = 0$, то й $T(F) = 0$, а тому $T(F) = K(F)$. Згідно з нерівністю $T(F) \ge K(F)$, рівність $T(F) = K(F)$ правильна і у випадку $K(F) = +\infty$.

Метою нашої роботи є доведення наступних теорем, які вказують на точність оцінки (3).

Теорема 1. *Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$, $K \in [0, +\infty]$ і $T \in [K, e^{\rho\tau(\lambda)}K]$. Тоді існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і $T(F) = T$.*

Теорема 2. *Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) = +\infty$, $K \in [0, +\infty]$ і $T \in [K, +\infty]$. Тоді існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і $T(F) = T$.*

Зауваження 1. *З теорем 1 і 2 випливає, що для кожної послідовності $\lambda \in \Lambda$ такої, що $\tau(\lambda) > 0$, існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $T(F) > K(F)$. Отже, у випадку $\tau(\lambda) > 0$, на відміну від випадку $\tau(\lambda) = 0$, R-тип ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ не можна, взагалі кажучи, обчислити за формулою $T(F) = K(F)$.*

Зауваження 2. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, а $\lambda^* = (\lambda_k^*)$ — підпослідовність послідовності λ. Розглянемо довільний ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$ вигляду*

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* e^{s\lambda_k^*}, \quad s = \sigma + it, \tag{4}$$

і для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ покладемо $a_n = a_k^*$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, і $a_n = 0$, якщо λ_n не є членом підпослідовності λ^*. Тоді для ряду Діріхле (1) з так визначеними коефіцієнтами a_n маємо $F(s) \equiv F^*(s)$, а тому $F \in \mathcal{D}(\lambda)$. Отже, якщо для деякої підпослідовності λ^* послідовності λ існує ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$, що володіє певною властивістю, то існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, який володіє цією ж властивістю.

Зауваження 3. *Легко довести, що для кожної послідовності $\lambda \in \Lambda$ і довільної сталої величини $K \in [0, +\infty]$ існує такий ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, що $T(F) = K(F) = K$. Справді, з* *кожної послідовності $\lambda \in \Lambda$ можна виділити таку додатну підпослідовність $\lambda^* = (\lambda_k^*)$, що $\tau(\lambda^*) = 0$. Покладемо тоді*

$$a_k^* = \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_k^*}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{5}$$

де (K_k) — довільна додатна послідовність, що прямує до K (у випадку $K = +\infty$ беремо $K_k = \sqrt{\lambda_k^*}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$), і розглянемо ряд Діріхле вигляду (4). За наведеною нижче лемою 2 цей ряд є цілим, а тому $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$. Крім того, для нього, як легко перевірити, $K(F^*) = K$. Тоді $T(F^*) = K(F^*) = K$ за наведеним вище твердженням Ж.Ф. Рітта. Залишилось врахувати зауваження 2.

1 Допоміжні результати

Наведемо деякі допоміжні результати, якими скористаємося при доведенні теорем 1 і 2. Наступну лему доведено в роботі М.М. Шеремети [6].

Лема 1. *З довільної послідовності $\lambda \in \Lambda$, для якої $\tau(\lambda) > \tau > 0$, можна виділити таку підпослідовність $\lambda^* = (\lambda_k^*)$, що $\ln k \le \tau\lambda_k^* + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $\ln k_j \ge \tau\lambda_{k_j}^*$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.*

Нехай $\lambda \in \Lambda$. Розглянемо довільний (не обов'язково цілий) ряд Діріхле вигляду (1) і покладемо

$$B(F) = \{\sigma \in (-\infty, +\infty) : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = o(1), n \to \infty\}, \qquad \beta(F) = \begin{cases} -\infty, & B(F) = \varnothing; \\ \sup B(F), & B(F) \ne \varnothing. \end{cases}$$

Легко довести (див., напр., [7, с. 10]), що

$$\beta(F) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}.$$

Приймемо також

$$h_0(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln|a_n|}.$$

Правильна така лема (див., напр., [7, с. 10, 12]).

Лема 2. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, а F — довільний ряд Діріхле вигляду (1). Якщо $\tau(\lambda) = 0$ або $h_0(F) < 1$, то для того, щоб цей ряд був цілим, необхідно і досить, щоб виконувалась умова $\beta(F) = +\infty$.*

Для кожної послідовності $\lambda \in \Lambda$ введемо позначення

$$\tau_1(\lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n}.$$

Зауважимо, що якщо $\tau(\lambda) < +\infty$, то $\tau_1(\lambda) = 0$.

Лема 3. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, а F — довільний ряд Діріхле вигляду (1). Якщо $\tau_1(\lambda) < \frac{1}{\rho}$ і $K(F) < +\infty$, то цей ряд є цілим.*

Доведення. Зафіксуємо таке додатне число K, що $K(F) < K$. Тоді з означення величини $K(F)$ отримуємо

$$|a_n| \le \left(\frac{Ke\rho}{\lambda_n}\right)^{\frac{\lambda_n}{\rho}}, \quad n \ge n_0.$$

Отже,

$$h_0(F) \le \rho \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \frac{\lambda_n}{Ke\rho}} = \rho\tau_1(\lambda) < 1.$$

Крім того,

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \ge \frac{1}{\lambda_n} \frac{\lambda_n}{\rho} \ln \frac{\lambda_n}{Ke\rho} = \frac{1}{\rho} \ln \frac{\lambda_n}{Ke\rho}, \quad n \ge n_0,$$

звідки випливає, що $\beta(F) = +\infty$. Залишилось зіслатись на лему 2. □

Нехай Ω — клас додатних на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що Φ' є додатною, неперервною, зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією. Для функції $\Phi \in \Omega$ нехай φ — обернена до Φ' функція. Функція φ є неперервною, зростаючою до $+\infty$ на $(0, +\infty)$. Покладемо

$$\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}, \quad \sigma \in (-\infty, +\infty).$$

Функція Ψ називається, як відомо, спряженою за Ньютоном з Φ і є зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$.

Лема 4. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, F — довільний ряд Діріхле вигляду (1) такий, що $\beta(F) = +\infty$, і $\Phi \in \Omega$. Тоді $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$, $\sigma \ge \sigma_0$, якщо і лише якщо $\ln|a_n| \le -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$, $n \ge n_0$.*

Лему 4 доведено в [7, с. 18-19] у припущенні, що F є цілим рядом Діріхле (тоді, зрозуміло, $\beta(F) = +\infty$). Однак, як легко переконатись, в доведенні використовується лише умова $\beta(F) = +\infty$ (яка може виконуватися і для ряду Діріхле, що не є цілим).

Прийнявши $\Phi(\sigma) = te^{\rho\sigma}$, $\sigma \in (-\infty, +\infty)$, де t — додатне число, з леми 4 отримуємо такий наслідок.

Лема 5. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, F — довільний ряд Діріхле вигляду (1) такий, що $\beta(F) = +\infty$, а t — додатне число. Тоді $\ln \mu(\sigma, F) \le te^{\rho\sigma}$, $\sigma \ge \sigma_0$, якщо і лише якщо*

$$|a_n| \le \left(\frac{te\rho}{\lambda_n}\right)^{\frac{\lambda_n}{\rho}}, \quad n \ge n_0.$$

Для ряду Діріхле F вигляду (1) і всіх $n \in \mathbb{N}_0$ покладемо $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$. Правильний наступний критерій цілості ряду (1) (див., напр., [2, с. 116]).

Лема 6. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Для того, щоб ряд Діріхле F вигляду (1) був цілим, необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{S_n} = +\infty.$$

Поряд з рядом F вигляду (1) розглянемо ряд Діріхле

$$\tilde{F}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n e^{s\lambda_n}. \tag{6}$$

Якщо ряд F є цілим, то за лемою 6 маємо $\beta(\tilde{F}) = +\infty$, тобто для ряду (6) його максимальний член $\mu(\sigma, \tilde{F}) = \max\{S_n e^{\sigma\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ є визначеним для кожного $\sigma \in (-\infty, +\infty)$. Більше того, якщо коефіцієнти a_n ряду F є невід'ємними числами і $\varepsilon > 0$, то, як доведено в [8], виконуються нерівності

$$\mu(\sigma, \tilde{F}) \le M(\sigma, F) \le M(0, F) + \frac{\sigma}{\varepsilon}\mu(\sigma+\varepsilon, \tilde{F}), \quad \sigma \in (-\infty, +\infty).$$

Використовуючи ці нерівності, легко довести (див. також [3]) таке твердження.

Лема 7. *Для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$ вигляду (1) з невід'ємними коефіцієнтами a_n правильна рівність $T(F) = t(\tilde{F})$.*

2 Доведення теореми 1

Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$, $K \in [0, +\infty]$ і $T \in [K, e^{\rho\tau(\lambda)}K]$. Доведемо, що тоді існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і $T(F) = T$.

Згідно із зауваженням 3, доведення потребує лише випадок, коли $\tau(\lambda) > 0$, $K \in (0, +\infty)$ і $T \in (K, e^{\rho\tau(\lambda)}K]$ (в інших випадках $K = T$).

Нехай $\tau = \frac{1}{\rho}\ln\frac{T}{K}$. Тоді $0 < \tau \le \tau(\lambda)$. Виберемо довільну додатну підпослідовність $\lambda^* = (\lambda_k^*)$ послідовності λ таку, що $\tau(\lambda^*) = \tau$ (якщо $0 < \tau < \tau(\lambda)$, то існування такої підпослідовності випливає з леми 1, а якщо $\tau = \tau(\lambda)$, то візьмемо $\lambda^* = (\lambda_{n+1})$). Покладемо

$$a_k^* = \left(\frac{Ke\rho}{\lambda_k^*}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Розглянемо ряд Діріхле (4) з так визначеними коефіцієнтами a_k^*. Оскільки $\tau(\lambda^*) = \tau < +\infty$ і для ряду F^* маємо, як легко бачити, $K(F^*) = K < +\infty$, то за лемою 3 цей ряд є цілим. Отже, $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$.

Доведемо, що $T(F^*) = e^{\rho\tau}K = T$. Застосовуючи нерівність (3) до ряду F^*, маємо $T(F^*) \le e^{\rho\tau}K$, а тому досить довести, що $T(F^*) \ge e^{\rho\tau}K$.

З рівності $\tau(\lambda^*) = \tau$ випливає існування додатної збіжної до τ послідовності (τ_k) і зростаючої послідовності (k_p) натуральних чисел таких, що

$$\ln k \le \tau_k\lambda_k^*, \quad k \in \mathbb{N}_0; \qquad \ln k_p = \tau_{k_p}\lambda_{k_p}^*, \quad p \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$m_p = \left[\frac{k_p+1}{2}\right], \qquad \sigma_p = \frac{1}{\rho}\ln\frac{\lambda_{k_p}^*}{e^{\rho\tau}K\rho}.$$

Оскільки коефіцієнти ряду F^* є невід'ємними числами, то

$$M(\sigma, F^*) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* e^{\sigma\lambda_k^*}, \quad \sigma \in (-\infty, +\infty), \tag{8}$$

а тому для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$M(\sigma_p, F^*) \ge \sum_{k=m_p}^{k_p} a_k^* e^{\sigma_p\lambda_k^*} = \sum_{k=m_p}^{k_p}\left(\frac{Ke\rho}{\lambda_k^*}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}}\left(\frac{\lambda_{k_p}^*}{e^{\rho\tau}K\rho}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}} \ge \sum_{k=m_p}^{k_p}\left(\frac{e}{e^{\rho\tau}}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}} \ge \sum_{k=m_p}^{k_p}\frac{e^{\frac{\lambda_{m_p}^*}{\rho}}}{e^{\tau\lambda_{k_p}^*}}$$
$$= (k_p - m_p + 1)e^{\frac{\lambda_{m_p}^*}{\rho} - \tau\lambda_{k_p}^*} > \frac{k_p}{2}e^{\frac{\lambda_{m_p}^*}{\rho} - \tau\lambda_{k_p}^*} = e^{\tau_{k_p}\lambda_{k_p}^* - \ln 2 + \frac{\lambda_{m_p}^*}{\rho} - \tau\lambda_{k_p}^*};$$

крім того,

$$\lambda_{m_p}^* \ge \frac{\ln m_p}{\tau_{m_p}} \ge \frac{\ln k_p - \ln 2}{\tau_{m_p}} = \frac{\tau_{k_p}\lambda_{k_p}^* - \ln 2}{\tau_{m_p}}.$$

Тоді, врахувавши, що $\sigma_p \to +\infty$, $p \to \infty$, і $\tau_k \to \tau$, $k \to \infty$, отримуємо

$$T(F^*) \ge \varliminf_{p\to\infty}\frac{\ln M(\sigma_p, F^*)}{e^{\rho\sigma_p}} \ge e^{\rho\tau}K\rho\varliminf_{p\to\infty}\frac{\tau_{k_p}\lambda_{k_p}^* - \ln 2 + \frac{1}{\rho\tau_{m_p}}(\tau_{k_p}\lambda_{k_p}^* - \ln 2) - \tau\lambda_{k_p}^*}{\lambda_{k_p}^*} = e^{\rho\tau}K.$$

Отже, ми довели, що для підпослідовності λ^* існує такий ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$, що $K(F^*) = K$ і $T(F^*) = T$. Тому (див. зауваження 2) існує такий ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, що $K(F) = K$ і $T(F) = T$. Теорему доведено.

3 Доведення теореми 2

Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) = +\infty$, $K \in [0, +\infty]$ і $T \in [K, +\infty]$. Доведемо, що тоді існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і $T(F) = T$.

Можемо вважати, згідно із зауваженням 3, що $K \in [0, +\infty)$ і $T \in (K, +\infty]$ (в іншому разі $K = T$). Далі розглядаємо окремо три випадки у залежності від значень, яких можуть набувати величини K і T.

Випадок 1: $K \in (0, +\infty)$, $T \in (K, +\infty)$. Покладемо $\tau = \frac{1}{\rho}\ln\frac{T}{K}$. Тоді $0 < \tau < +\infty$, а тому за лемою 1 з послідовності λ можемо вибрати таку підпослідовність $\lambda^* = (\lambda_k^*)$, що $\tau(\lambda^*) = \tau$. За теоремою 1 існує ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$, для якого $K(F^*) = K$ і $T(F^*) = e^{\rho\tau(\lambda^*)}K = T$. Тому (див. зауваження 2) існує такий ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, що $K(F) = K$ і $T(F) = T$.

Випадок 2: $K \in [0, +\infty)$, $T = +\infty$. Використовуючи лему 1, легко довести, що з послідовності λ можна виділити таку додатну підпослідовність $\lambda^* = (\lambda_k^*)$, що $\tau(\lambda^*) = +\infty$ і $\tau_1(\lambda^*) < \frac{1}{\rho}$.

Оскільки $\tau(\lambda^*) = +\infty$, то існують додатна зростаюча до $+\infty$ послідовність (τ_k) і зростаюча послідовність (k_p) натуральних чисел, для яких виконуються рівності (7). Для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$K_k = \begin{cases} K, & \text{якщо } K \in (0, +\infty); \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_k}}, & \text{якщо } K = 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\lim_{k\to\infty} K_k = K, \qquad \lim_{k\to\infty}\tau_k K_k = +\infty. \tag{9}$$

Розглянемо ряд Діріхле (4) з коефіцієнтами a_k^*, визначеними за (5). Використовуючи першу з рівностей (9), легко отримуємо, що $K(F^*) = K < +\infty$. Крім того, $\tau_1(\lambda^*) < \frac{1}{\rho}$. Тоді за лемою 3 розглянутий ряд є цілим. Отже, $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$.

Доведемо, що $T(F^*) = +\infty$. Для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$m_p = \left[\frac{k_p+1}{2}\right], \qquad \sigma_p = \frac{1}{\rho}\ln\frac{\lambda_{k_p}^*}{K_{k_p}e\rho}.$$

Оскільки коефіцієнти ряду F^* є невід'ємними числами, то виконується (8), а тому для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$M(\sigma_p, F^*) \geq \sum_{k=m_p}^{k_p} a_k^* e^{\sigma_p \lambda_k^*} = \sum_{k=m_p}^{k_p} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_k^*}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}} \left(\frac{\lambda_{k_p}^*}{K_{k_p} e\rho}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}} \geq \sum_{k=m_p}^{k_p} 1 = k_p - m_p + 1 > \frac{k_p}{2}.$$

Тоді, врахувавши, що $\sigma_p \to +\infty$, $p \to \infty$, і скориставшись другою з рівностей (9), отримуємо

$$T(F^*) \geq \varlimsup_{p\to\infty} \frac{\ln M(\sigma_p, F^*)}{e^{\rho\sigma_p}} \geq \varlimsup_{p\to\infty} \frac{\ln k_p - \ln 2}{\lambda_{k_p}^*} K_{k_p} e\rho = e\rho \varlimsup_{p\to\infty} \tau_{k_p} K_{k_p} = +\infty.$$

Отже, ми довели, що для підпослідовності λ^* існує такий ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$, що $K(F^*) = K$ і $T(F^*) = +\infty$. Тому (див. зауваження 2) існує такий ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, що $K(F) = K$ і $T(F) = +\infty$.

Випадок 3: $K = 0$, $T \in (0, +\infty)$. З рівності $\tau(\lambda) = +\infty$ випливає існування додатної зростаючої до $+\infty$ послідовності (τ_n) і зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел таких, що $\ln n \leq \tau_n \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}_0$; $\ln n_k = \tau_{n_k} \lambda_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. При цьому, зрозуміло, послідовність (n_k) можемо вважати зростаючою настільки швидко, що для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ виконуються нерівності

$$\left[\frac{n_{k+1}}{2}\right] > n_k, \qquad \left(\frac{(T+1)e\rho}{\lambda_{n_{k+1}}}\right)^{\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\rho}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{Te\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}}. \tag{10}$$

Приймемо $m_k = \left[\frac{n_k}{2}\right]$. Тоді $m_k < n_k < m_{k+1}$ за першою з нерівностей (10). За індукцією, використовуючи другу з нерівностей (10), отримуємо

$$\left(\frac{(T+1)e\rho}{\lambda_{n_{k+j}}}\right)^{\frac{\lambda_{n_{k+j}}}{\rho}} \leq \frac{1}{2^j}\left(\frac{Te\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Нехай $K_k = Te^{-\tau_{n_k}\rho}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що послідовність (K_k) є спадною до нуля. Для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ покладемо $a_n = 0$, якщо $n \notin [m_k, n_k]$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$, і нехай

$$a_n = \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_n}\right)^{\frac{\lambda_n}{\rho}},$$

якщо $n \in [m_k, n_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$. Розглянемо ряд Діріхле (1) з так визначеними коефіцієнтами a_n і зауважимо, що його можна зобразити у вигляді

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=m_k}^{n_k} a_n e^{s\lambda_n}.$$

Зрозуміло, що $K(F) = 0$. Доведемо, що ряд F є цілим і для нього $T(F) = T$.

Нехай $a > 0$ — фіксоване число. Тоді функція $y = \left(\frac{ae}{x}\right)^x$ є спадною до нуля на півінтервалі $[a, +\infty)$. Отже, якщо $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : \lambda_{m_k} \geq \rho K_0\}$, то для всіх $k \geq k_0$ і кожного $n \in [m_k, n_k]$ маємо $a_{m_k} \geq a_n \geq a_{n_k} > a_{m_{k+1}}$. Тому, прийнявши

$$T_k = \frac{\lambda_{n_k}}{e\rho} e^{\tau_{n_k}\rho} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}}, \qquad R_k = \frac{\lambda_{m_k}}{e\rho} e^{\tau_{n_k}\rho - \frac{\rho}{\lambda_{m_k}}} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}},$$

для всіх $k \geq k_1$ отримуємо

$$\sum_{n=m_k}^{n_k} a_n \leq n_k a_{m_k} = e^{\tau_{n_k}\lambda_{n_k}} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\rho}} = \left(\frac{T_k e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}}, \tag{12}$$

$$\sum_{n=m_k}^{n_k} a_n \geq \frac{n_k}{e} a_{n_k} = e^{\tau_{n_k}\lambda_{n_k} - 1} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} = \left(\frac{R_k e\rho}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\rho}}. \tag{13}$$

Оскільки

$$\lambda_{n_k} \geq \lambda_{m_k} \geq \frac{\ln m_k}{\tau_{m_k}} \geq \frac{\ln n_k - 1}{\tau_{n_k}} = \lambda_{n_k} - \frac{1}{\tau_{n_k}}, \quad k \geq k_2,$$

то для всіх $k \geq k_2$ маємо $\lambda_{n_k} - \lambda_{m_k} = \frac{\theta_k}{\tau_{n_k}}$, $0 \leq \theta_k \leq 1$, звідки, зокрема, випливає співвідношення $\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \to 1$, $k \to \infty$.

Далі покажемо, що $\lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} R_k = T$. Справді, оскільки $K_k = Te^{-\tau_{n_k}\rho}$, то при $k \to \infty$ отримуємо

$$\begin{aligned} T_k = \frac{\lambda_{n_k}}{e\rho} e^{\tau_{n_k}\rho} \left(\frac{Te\rho}{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}} &= T\left(\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}} \left(\frac{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{n_k}}{Te\rho}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}-\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}} \\ &= T\left(\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}} \left(\frac{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{n_k}}{Te\rho}\right)^{\frac{\theta_k}{\lambda_{n_k}\tau_{n_k}}} \to T, \\ R_k = \frac{\lambda_{m_k}}{e\rho} e^{\tau_{n_k}\rho - \frac{\rho}{\lambda_{m_k}}} \left(\frac{Te\rho}{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}} &= e^{-\frac{\rho}{\lambda_{m_k}}} T\left(\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}} \left(\frac{Te\rho}{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}-\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k}}} \\ &= e^{-\frac{\rho}{\lambda_{m_k}}} T\left(\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}} \left(\frac{Te\rho}{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\theta_k}{\lambda_{m_k}\tau_{n_k}}} \to T. \end{aligned}$$

Покладемо $S_p = \sum_{n=p}^{\infty} a_n$, $p \in \mathbb{N}_0$ і зафіксуємо довільне $\varepsilon \in (0, \min\{1, T\})$. З (12) випливає, що

$$\sum_{n=m_k}^{n_k} a_n \leq n_k a_{m_k} \leq \left(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}}, \quad k \geq k_3(\varepsilon).$$

Використовуючи (11), для всіх $p \in (n_k, n_{k+1}]$ і $k \geq k_4(\varepsilon)$ маємо

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{n=m_k}^{n_k} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=m_{k+j}}^{n_{k+j}} a_n \leq \left(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(T+1)e\rho}{\lambda_{n_{k+j}}}\right)^{\frac{\lambda_{n_{k+j}}}{\rho}} \\ &\leq \left(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\left(\frac{Te\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} \leq 2\left(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} \leq \left(\frac{(T+2\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} \leq \left(\frac{(T+2\varepsilon)e\rho}{\lambda_p}\right)^{\frac{\lambda_p}{\rho}}. \end{aligned}$$

Звідси і з леми 6 випливає, що ряд F є цілим. Крім того, розглянувши поряд з рядом F ряд $\tilde{F}$, визначений за (6), і застосувавши до ряду $\tilde{F}$ лему 5, отримуємо нерівність $\ln \mu(\sigma, \tilde{F}) \leq (T+2\varepsilon)e^{\rho\sigma}$, $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$. Тоді $t(\tilde{F}) \leq T + 2\varepsilon$.

З іншого боку, за (13) для всіх $k \geq k_5(\varepsilon)$ маємо

$$S_{m_k} > \sum_{n=m_k}^{n_k} a_n > \left(\frac{(T-\varepsilon)e\rho}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\rho}},$$

а тому за лемою 5 існує така зростаюча до $+\infty$ послідовність (σ_n), що

$$\ln \mu(\sigma_n, \tilde{F}) > (T-\varepsilon)e^{\rho\sigma_n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді $t(\tilde{F}) \geq T - \varepsilon$.

Отже, $T - \varepsilon \leq t(\tilde{F}) \leq T + 2\varepsilon$, звідки, завдяки довільності $\varepsilon \in (0, \min\{1, T\})$, отримуємо $t(\tilde{F}) = T$. Тоді $T(F) = T$ за лемою 7. Теорему 2 повністю доведено.

References

[1] Filevich P.V. *On Valiron's theorem on the relations between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series*. Russ. Math. 2004, **48** (4), 63–69. (translation of Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat. 2004, **4** (503), 66–72. (in Russian))

[2] Leont'ev A.F. Series of exponents. Nauka, Moscow, 1976. (in Russian)

[3] Mulyava O.M., Filevych P.V. *On the growth of an entire Dirichlet series with nonnegative coefficients*. Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2003, **62**, 89–94. (in Ukrainian)

[4] Prytula Ya.Ya. *On the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series*. Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 1995, **43**, 25–30. (in Ukrainian)

[5] Ritt J.F. *On certain points in the theory of Dirichlet series*. Amer. J. Math. 1928, **50**, 73–83.

[6] Sheremeta M.N. *Behavior of the maximum of the absolute value of an entire Dirichlet series outside an exceptional set*. Math. Notes 1995, **57** (2), 198–207. doi:10.1007/BF02309154 (translation of Mat. Zametki 1995, **57** (2), 283–296. (in Russian))

[7] Sheremeta M.M. Entite Dirichlet series. ISDO, Kyiv, 1993. (in Ukrainian)

[8] Sheremeta M.M. *On the growth of an entire Dirichlet series*. Ukrainian Math. J. 1999, **51** (8), 1296–1302. doi:10.1007/BF02592520 (translation of Ukr. Mat. Zhurn. 1999, **51** (8), 1149–1153. (in Ukrainian))

[9] Valiron G. *Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet*. Bull. Soc. Math. France 1924, **52**, 86–98.

Надійшло 25.09.2013

Hlova T.Ya., Filevych P.V. *On an estimation of R-type of entire Dirichlet series and its exactness*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 208–216.

Let (λ_n) be a nonnegative sequence, increasing to $+\infty$, $\tau = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}$, and ρ be a positive number. It follows from a classical theorem of G. Valiron that for every Dirichlet series of the form $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ we have

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}}{e^{\rho\sigma}} \leq e^{\rho\tau} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{e\rho} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}.$$

The exactness of this estimation is proved in the paper.

Key words and phrases: entire Dirichlet series, maximum modulus, maximum term, R-type.

Глова Т.Я., Филевич П.В. *Об одной оценке R-типа целого ряда Дирихле и ее точности* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 208–216.

Пусть (λ_n) — неотрицательная возрастающая к $+\infty$ последовательность, $\tau = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}$, а ρ — положительное число. Из классической теоремы Ж. Валирона следует, что для каждого целого ряда Дирихле вида $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ имеет место оценка

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}}{e^{\rho\sigma}} \leq e^{\rho\tau} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{e\rho} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}.$$

В работе доказано точность этой оценки.

Ключевые слова и фразы: целый ряд Дирихле, максимум модуля, максимальный член, R-тип.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.589, 517.926.4

GOY T.P., ZATORSKY R.A.

NEW INTEGRAL FUNCTIONS GENERATED BY RISING FACTORIAL POWERS

Goy T.P., Zatorsky R.A. *New integral functions generated by rising factorial powers*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 217–224.

We consider new nonelementary functions such as the Fresnel integrals, generated by rising factorial powers. Graphs of such functions are plotted and some of their properties are proved. It is shown, that new integral functions are solutions of second order ordinary differential equations with variable coefficients.

Key words and phrases: factorial power, rising factorial power, Fresnel integrals, power series, Cauchy problem.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: tarasgoy@yahoo.com (Goy T.P.), romazz@rambler.ru (Zatorsky R.A.)

INTRODUCTION

Mathematical models of various natural and industrial processes often lead to problems, such that it is impossible to obtain exact solutions of which by means of well-known classical methods. This is the reason for further development of function theory and numerical analysis. Enlargement of an "library" of nonelementary functions leads to the enlargement of tasks that can be solved in closed form. That's why the introducing of new nonelementary functions and studying of their properties are actual tasks.

In [7], [8] we investigate new nonelementary functions $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, constructed by replacing in a power series of classical transcendental functions $\sin x$, $\cos x$ falling factorial powers $n^{\underline{n}}$ (i.e. usual factorials) by corresponding rising factorial powers $n^{\overline{n}}$. Replacing in the Fresnel integrals $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$, $\int\limits_0^x \sin t^2 dt$ trigonometric functions by the functions $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, we get new real functions

$$\widetilde{C}(x) = \int_0^x \mathrm{Cos}\,(t^2)dt, \quad \widetilde{S}(x) = \int_0^x \mathrm{Sin}\,(t^2)dt.$$

Note, that the Fresnel integrals were originally used in the calculation of a field intensity in an environment related to the bending of light around opaque objects (in diffraction theory). Recently the Fresnel integrals and their various generalizations have been used in vibration theory, in the design of highways and railways, etc (see, for example, [1], [3], [5], [10]–[16], [18] and the references given there).

The aim of this paper is to study the functions $\widetilde{C}(x)$, $\widetilde{S}(x)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 33E20.

1 PRELIMINARIES AND NOTATIONS

For an arbitrary $x \in \mathbb{R}$ and $m \in \mathbb{N}$ the *factorial power* m with the step of $k \in \mathbb{R}$ is the expression
$$x^{m\{k\}} = x(x+k)(x+2k)\cdot \ldots \cdot (x+(m-1)k).$$
Factorial power $x^{m\{k\}}$ is called *rising* if $k > 0$, and is called *falling* if $k < 0$. By definition, put $x^{0\{k\}} \equiv 1$. If $k = 0$, then we have a simple power, i.e. $x^{m\{0\}} = x^m$.

Rising factorial powers with the step of 1 and falling factorial powers with the step of (-1) we will denote by
$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+m-1), \qquad x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-m+1),$$
respectively.

Different notation of factorial powers are used by other authors (see [4], [6], [9], [17]). For example, a rising factorial power m with the step of 1 often denoted by the Pochhammer symbol $(x)_m$, i.e. $(x)_m = x^{\overline{m}}$.

Relation between the factorial function $m!$ and rising (falling) factorials is expressed by the formula
$$m! = 1^{\overline{m}} = m^{\underline{m}}.$$

The main properties of falling factorial powers with the step of (-1) and rising factorial powers with the step of 1 are given by the formulas
$$\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}, \qquad \overline{\Delta} x^{\overline{m}} = m x^{\overline{m-1}},$$
respectively, where $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ is a forward difference of a function $f(x)$ and $\overline{\Delta} f(x) = f(x) - f(x-1)$ is a backward difference of a function $f(x)$.

2 FUNCTIONS $\mathrm{Cos}\,(x)$, $\mathrm{Sin}\,(x)$, DEFINED BY THE RISING FACTORIAL POWERS

The known power series
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\underline{2n}}} x^{2n}, \tag{1}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\underline{2n+1}}} x^{2n+1} \tag{2}$$
can be treated as the series constructed with the help of falling factorial powers.

In analogy to these series in [7], [8] we investigate new nonelementary functions $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, constructed with the help of rising factorial powers
$$\mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\overline{2n}}} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n\cdot(2n+1)\cdot\ldots\cdot(4n-1)} + \ldots,$$
$$\mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}} x^{2n+1}$$
$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^5}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot\ldots\cdot(4n+1)} + \ldots.$$

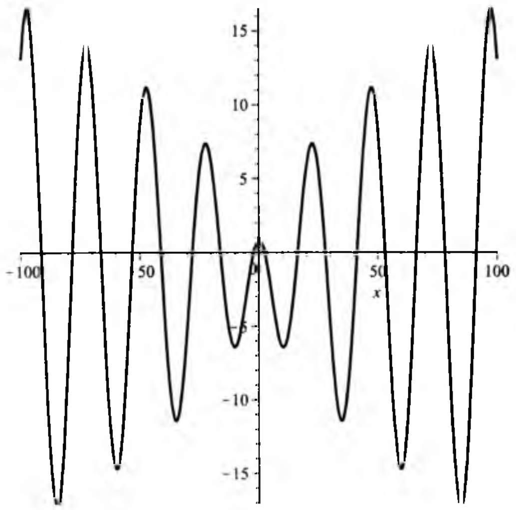
It is clear that
$$\mathrm{Cos}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{(4n-1)!} x^{2n}, \tag{3}$$
$$\mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(4n-3)!} x^{2n-1}. \tag{4}$$
Absolutely convergence on the real axis of the series (3) and (4) can easily be shown.

In [8] it is also proved that
$$\mathrm{Cos}(x) = 1 + 2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sin\frac{x}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \tag{5}$$
$$\mathrm{Sin}(x) = 2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \tag{6}$$
where $C(p)$ and $S(p)$ are the real Fresnel integrals (cosine-integral and sine-integral) which defined by formulas (see, for example, [2], [17])
$$C(p) = \int_0^p \cos t^2\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!} p^{4n+1}, \tag{7}$$
$$S(p) = \int_0^p \sin t^2\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} p^{4n+3}. \tag{8}$$
Given (7), (8), the formulas (5), (6) can be rewritten as
$$\mathrm{Cos}\,(x) = 1 + 2\sqrt{x}\int_0^{\frac{\sqrt{x}}{2}} \sin\left(t^2 + \frac{x}{4}\right) dt,$$
$$\mathrm{Sin}(x) = 2\sqrt{x}\int_0^{\frac{\sqrt{x}}{2}} \cos\left(t^2 - \frac{x}{4}\right) dt.$$

Some authors define the Fresnel integrals as
$$C^*(p) = \int_0^p \cos\frac{\pi t^2}{2}\, dt, \qquad S^*(p) = \int_0^p \sin\frac{\pi t^2}{2}\, dt.$$

Then the functions $C^*(p)$, $S^*(p)$ can be represented in the following form
$$\mathrm{Cos}(x) = 1 + \sqrt{2\pi}\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\, S^*\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}\right) - \sin\frac{x}{4}\, C^*\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}\right)\right),$$
$$\mathrm{Sin}(x) = \sqrt{2\pi}\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\, C^*\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}\right) + \sin\frac{x}{4}\, S^*\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}\right)\right).$$

Figures 1, 2 show the graphs of functions $y = \mathrm{Cos}(x)$ and $y = \mathrm{Sin}(x)$.



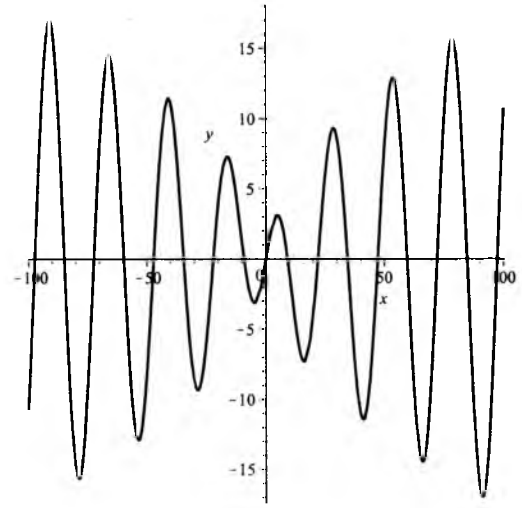


Fig. 1. Graph of the function $y = \operatorname{Cos}(x)$ Fig. 2. Graph of the function $y = \operatorname{Sin}(x)$

3 Integral functions $\widehat{C}(x)$, $\widehat{S}(x)$ and their properties

We will denote by $\widehat{C}(x)$ the function defined by formula

$$\widehat{C}(x) = \int_0^x \operatorname{Cos}(t^2)\,dt. \tag{9}$$

By (3), (7) we obtain the following series expansion of function $\widehat{C}(x)$:

$$\widehat{C}(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{(4n-1)!\,(4n+1)}\, x^{4n+1}.$$

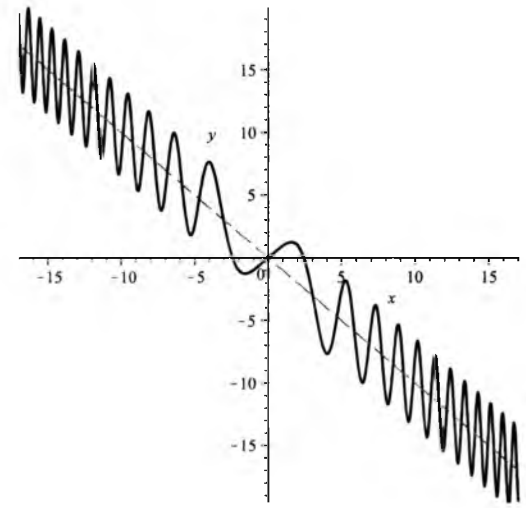
Then, since

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{(4n-1)!\,(4n+1)}\, x^{4n+1} &= -\,2x + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{16^n} \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{(2s)!(2n-2s)!(4n-4s+1)} \\ &+ 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+5}}{16^{n+1}} \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{(2s+1)!(2n-2s+1)!(4n-4s+3)} \\ &= -\,2x + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,4^{2n}}\, x^{4n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(4n+1)2^{4n+1}}\, x^{4n+1} \\ &+ 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,4^{2n+1}}\, x^{4n+2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(4n+3)2^{4n+3}}\, x^{4n+3},\end{aligned}$$

from (3), using (1), (2), we obtain

$$\widehat{C}(x) = -\,x + 4\left(\cos\frac{x^2}{4}\, C\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x^2}{4}\, S\left(\frac{x}{2}\right)\right). \tag{10}$$

The graph of $y = \widehat{C}(x)$ is plotted in the Figure 3 (the dashed line is graph of the function $y = -x$).



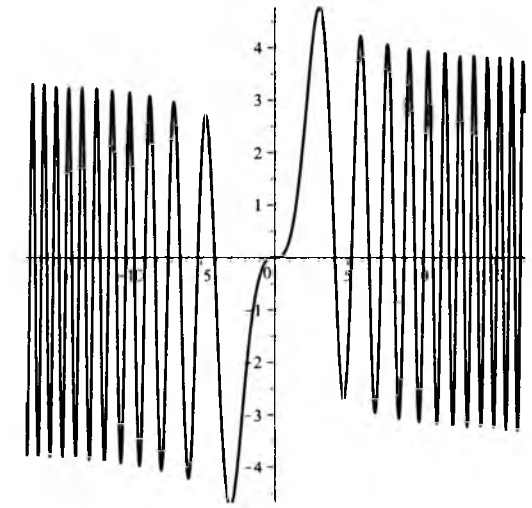


Fig. 3. Graph of the function $y = \widehat{C}(x)$ Fig. 4. The graph of the function $y = \widehat{S}(x)$

Define the following function

$$\widehat{S}(x) = \int_0^x \operatorname{Sin}(t^2)\,dt. \tag{11}$$

From (11) and (4) we obtain presentation of function $\widehat{S}(x)$ in the form

$$\widehat{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(4n-3)!\,(4n-1)}\, x^{4n-1}. \tag{12}$$

Since

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(4n-3)!\,(4n-1)}\, x^{4n-1} &= \frac{x^3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{16^n} \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{(2s+1)!(2n-2s)!(4n-4s+1)} \\ &+ \frac{x^3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{16^n} \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{(2s)!(2n-2s+1)!(4n-4s+3)} \\ &= 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,4^{2n+1}}\, x^{4n+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(4n+1)2^{4n+1}}\, x^{4n+1} \\ &- 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,4^{2n}}\, x^{4n+2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(4n+3)2^{4n+3}}\, x^{4n+3},\end{aligned}$$

from (12), using (1), (2), (7), (8), we get

$$\widehat{S}(x) = 4\left(\sin\frac{x^2}{4}\, C\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\frac{x^2}{4}\, S\left(\frac{x}{2}\right)\right). \tag{13}$$

Graph of the function $y = \widehat{S}(x)$ is plotted in the Figure 4.

The following proposition establishes a relation between the new functions $\widehat{C}(x)$, $\widehat{S}(x)$ and classical Fresnel integrals.

Proposition 3.1. *For all $x \in \mathbb{R}$*

$$\left(\widehat{C}(x)+x\right)^2+\widehat{S}^2(x)=16\left(C^2\left(\tfrac{x}{2}\right)+S^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right). \tag{14}$$

Proof. Squaring and adding the formulas

$$\cos\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\widehat{C}(x)+x}{4},$$

$$\sin\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\widehat{S}(x)}{4},$$

which may be derived from (10), (13) respectively, we obtain formula (14). □

The following proposition establishes a relation between the functions $\widehat{C}(x)$, $\widehat{S}(x)$ and $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$.

Proposition 3.2. *For all $x \in \mathbb{R}$*

$$\left(\widehat{C}(x)+x\right)^2+\widehat{S}^2(x)=\frac{8}{x^2}\left(\left(1-\mathrm{Cos}\,(x^2)\right)^2+\mathrm{Sin}^2(x^2)\right). \tag{15}$$

Proof. From (5), (6) it follows that

$$\left(1-\mathrm{Cos}\,(x)\right)^2+\mathrm{Sin}^2(x)=2x\left(C^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+S^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right).$$

Hence, using (14), we get (15). □

4 Differential equations of functions $\widehat{S}(x)$, $\widehat{C}(x)$

In this section it is shown that both functions $\widehat{C}(x)$, $\widehat{S}(x)$ are solutions of the Cauchy problem for the inhomogeneous linear ordinary differential equation of second order with continuous coefficients.

Proposition 4.1. *The functions $\widehat{C}(x)$, $\widehat{S}(x)$ are solutions of the Cauchy problems*

$$4xy''-4y'+x^3y=-x^4-4,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1; \tag{16}$$

$$4xy''-4y'+x^3y=4x^2,\quad y(0)=0,\ y'(0)=0. \tag{17}$$

respectively.

Proof. Using (9), (11) we obtain that the functions $\widehat{C}(x)$, $\widehat{S}(x)$ satisfy the corresponding initial conditions. It remains to check that these functions are the solutions of differential equations from (16), (17).

First of all, using (10), we find the first and second derivatives of the function $\widehat{C}(x)$

$$\widehat{C}'(x)=1-2x\left(\sin\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right)\right), \tag{18}$$

$$\widehat{C}''(x)=-2\left(\sin\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right)\right)-x^2\left(\cos\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right)\right). \tag{19}$$

We obtain the differential equation (16) from (3), (18), (19) by elimination the expressions

$$\cos\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right),\quad \cos\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right). \tag{20}$$

The proof for $\widehat{S}(x)$ is similar. We obtain the differential equation (17) by elimination the expressions (20) from (4) and formulas

$$\widehat{S}'(x)=2x\left(\cos\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

$$\widehat{S}''(x)=x-x^2\left(\sin\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right)\right)+2\left(\cos\frac{x^2}{4}\,C\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x^2}{4}\,S\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

□

References

[1] Abedin K.M., Mujibur Rahman S.M. *Computer simulation of Fresnel diffraction from double rectangular apertures in one and two dimensions using the iterative Fresnel integrals method.* Opt. Laser Technol. 2012, **44** (2), 394–402. doi:10.1016/j.optlastec.2011.08.001

[2] Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, New York, 1972.

[3] Bulatov V.V., Vladimirov Y.V. Internal Gravity Waves in an Inhomogeneous Medium. Nauka, Moscow, 2005. (in Russian)

[4] Comtet L. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reidel Publishing, Dordrecht, 1974.

[5] Dmitriev A.Yu., Doskolovich L.L., Kharitonov S.I. *Asymptotic computation of the light field intensity for a diffractive optical element to focus into a line.* Comp. Optics. 2008, **32** (2), 195–200. (in Russian)

[6] Gelfond A.O. Calculus of Finite Differences. GIFML, Moscow, 1959. (in Russian)

[7] Goy T.P., Zatorsky R.A. *Differential equations of functions generated by rising factorial powers.* In: Proc. of the Intern. Math. Conf. "Bogolyubov readings DIF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications", Sevastopol, Ukraine, June 23—30, 2013, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2013, 83–84. (in Ukrainian)

[8] Goy T.P., Zatorsky R.A. *New functions defined by rising factorials, and its properties.* Bukovyna Math. J. 2013, **1** (1–2), 28–33. (in Ukrainian)

[9] Jordan C. Calculus of Finite Differences. Chelsea Publishing, New York, 1939.

[10] Kelly A., Nagy B. *Reactive nonholonomic trajectory generation via parametric optimal control the international.* J. Robot. Res. 2003, **22** (7–8), 583–601. doi:10.1177/02783649030227008

[11] Kenmoe M.B., Phien H.N., Kiselev M.N., Fai L.C. *Effects of colored noise on Landau-Zener transitions: two and three-level systems.* Phys. Rev. B. 2013, **87** (22), 224301.1–224301.18. doi:10.1103/PhysRevB.87.224301

[12] Kimia B.B., Frankel I., Popescu A.-M. *Euler Spiral for Shape Completion.* Int. J. Comput. Vision. 2003, **54** (1/2/3), 159–182. doi:10.1023/A:1023713602895

[13] Mathar R.J. *Series Expansion of Generalized Fresnel Integrals*, preprint (http://arxiv.org/pdf/1211.3963)

[14] McCormick M.E., Kraemer D.R.B. *Polynomial approximations for Fresnel integrals in diffraction analysis.* Coast. Eng. 2002, **44**, 261–266. doi:10.1016/S0378-3839(01)00034-5

[15] Mittra R., Lee S.W. Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. Mir, Moscow, 1974. (in Russian)

[16] Monk K., Zou Q., Conley D. *An approximate solution for the wave energy shadow in the lee of an array of overtopping type wave energy converters.* Coast. Eng. 2013, **73**, 115–132. doi:10.1016/j.coastaleng.2012.10.004

[17] Oldham K.B., Myland J., Spanier J. An Atlas of Functions: with Equator, the Atlas Function Calculator. Springer, 2008.

[18] Walton D.J., Meek D.S. *A controlled clothoid spline.* Computers & Graphics 2005, **29**, 353–363. doi: 10.1016/j.cag.2005.03.008

Received 13.09.2013

Гой Т.П., Заторський Р.А. *Нові інтегральні функції, породжені зростаючими факторіальними степенями* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — C. 217–224.

Запропоновані нові неелементарні функції типу інтегралів Френеля, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів. Встановлені деякі властивості цих інтегральних функцій, побудовані їх графіки. Виведені звичайні диференціальні рівняння, розв'язками яких є нові інтегральні функції.

Ключові слова і фрази: факторіальний степінь, зростаючий факторіальний степінь, інтеграли Френеля, степеневі ряди, задача Коші.

Гой Т.П., Заторский Р.А. *Новые интегральные функции, порожденные возрастающими факториальными степенями* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 217–224.

Рассматриваются новые неэлементарные функции типа интегралов Френеля, порожденные возрастающими факториальными степенями. Установлены некоторые свойства этих интегральных функций, построены их графики. Выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых есть новые интегральные функции.

Ключевые слова и фразы: факториальная степень, возростающая факториальная степень, интегралы Френеля, степенные ряды, задача Коши.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.524:511.55

DMYTRYSHYN R.I.

POSITIVE DEFINITE BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF SPECIAL FORM

Dmytryshyn R.I. *Positive definite branched continued fractions of special form.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 225–230.

Research of the class of branched continued fractions of special form, whose denominators do not equal to zero, is proposed and the connection of such fraction with a certain quadratic form is established. It furnishes new opportunities for the investigation of convergence of branching continued fractions of special form.

Key words and phrases: positive definite branched continued fraction of special form, quadratic form.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ukraine, Ivano-Frankivsk
E-mail: dmytryshynr@hotmail.com

INTRODUCTION

The convergence problem of the continued fractions and their generalizations — branched continued fractions (BCF) — is that on the basis of information on the coefficients of fraction to conclude about of its convergence or divergence. Using the methods of majorants, fundamental inequalities, theorems about compact family of holomorphic functions, the convergence of some numerical and functional BCF of special form are investigated in [1, 2, 3, 5, 6, 7]. Taking into account the formulas for the numerators and denominators of approximants as determinants, the properties of positive definite BCF are defined and considered in the monograph [4, pp. 130–137]. The criteria of positive definite of the BCF established here are sufficient as opposed to one-dimensional case, where the analogous conditions are also necessary. As a result, for bounded and real multidimensional J-fractions the properties are studied and the criteria of convergence are established [4, pp. 141–146].

In this paper we have defined class of BCF whose denominators do not equal to zero — positive definite BCF of special form. Representing denominators as determinants, the connection between the about mentioned fraction and the certain quadratic form is established. Moreover, for BCF of special form the sufficient and necessary conditions of the positive definiteness are established.

1 DEFINITION OF A POSITIVE DEFINITE BCF OF SPECIAL FORM

We consider BCF of the form

$$\Phi_0 + \cfrac{1}{b_{01} + z_{01} - \Phi_1 + \displaystyle\mathop{\mathrm{D}}_{s=2}^{\infty} \frac{-a_{0s}^2}{b_{0s} + z_{0s} - \Phi_s}}, \quad \Phi_p = \cfrac{1}{b_{1p} + z_{1p} + \displaystyle\mathop{\mathrm{D}}_{r=2}^{\infty} \frac{-a_{rp}^2}{b_{rp} + z_{rp}}}, \quad p \geq 0, \qquad (1)$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11A55, 65D15, 11J70.

where a_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, r \neq 1, r+s \geq 2$, b_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$, are complex numbers, z_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$, are complex variables. Let $\mathbf{z} = (z_{10}, z_{01}, z_{20}, z_{11}, z_{02}, \ldots)$ be an infinite-dimensional vector and n be an arbitrary natural number. By curtailing the nth approximant

$$f_n(\mathbf{z}) = \Phi_0^n + \cfrac{1}{b_{01} + z_{01} - \Phi_1^{n-1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{s=2}^{n} \cfrac{-a_{0s}^2}{b_{0s} + z_{0s} - \Phi_s^{n-s}}}, \tag{2}$$

where

$$\Phi_p^{n-p} = \cfrac{1}{b_{1p} + z_{1p} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{r=2}^{n-p} \cfrac{-a_{rp}^2}{b_{rp} + z_{rp}}}, \quad 0 \leq p \leq n-1,$$

of BCF (1) top-down without any shortening in the intermediate operations (see [4, pp. 15–27]), we obtain its representation as a ratio

$$f_n(\mathbf{z}) = \frac{A_n(\mathbf{z})}{B_n(\mathbf{z})}, \tag{3}$$

where $A_n(\mathbf{z})$, $B_n(\mathbf{z})$ are polynomials of variables z_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, 1 \leq r+s \leq n$, and constant numbers a_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, r \neq 1, 2 \leq r+s \leq n$, b_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, 1 \leq r+s \leq n$.

The numerator of ratio (3) $A_n(\mathbf{z})$ is called nth numerator and denominator $B_n(\mathbf{z})$ — nth denominator of the approximant (2).

Obviously that for any $n \geq 1$ each positive integer $j \leq n(n+3)/2$ can be uniquely written as

$$j = 1 + 2 + \cdots + (r-1) + r + s, \tag{4}$$

where $1 \leq r \leq n, 0 \leq s \leq r$. We consider the symmetric matrix

$$C_{n(n+3)/2} = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n(n+3)/2} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n(n+3)/2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n(n+3)/2,1} & c_{n(n+3)/2,2} & \cdots & c_{n(n+3)/2,n(n+3)/2} \end{matrix} \right\|, \quad n \geq 1, \tag{5}$$

whose elements are related to the components of BCF (1) as follows: $c_{jj} = b_{r-s,s} + z_{r-s,s}$; $c_{j,j+r+1} = c_{j+r+1,j} = -1$, $c_{j,j+r+2} = c_{j+r+2,j} = -a_{0,r+1}$, if $s = r$, i.e., $j = r(r+3)/2$; $c_{j,j+r+1} = c_{j+r+1,j} = -a_{r-s+1,s}$, if $0 \leq s < r$; $c_{ij} = 0$ otherwise; where $1 \leq i, j \leq n(n+3)/2$, $n \geq 1$, r and s are determined from the decomposition number j as (4).

By arguments similar to the proof of the lemma 4.1 [4, pp. 130–132], we can show that following lemma holds.

Lemma 1. *The denominators of the BCF* (1) *are given by the formulas* $B_n(\mathbf{z}) = \det C_{n(n+3)/2}$, $n \geq 1$, *where* $C_{n(n+3)/2}$, $n \geq 1$, *are matrices as* (5).

Let n be an arbitrary natural number,

$$X_n = (x_{10}, x_{01}, \ldots, x_{n0}, x_{n-1,1}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{C}^{n(n+3)/2}.$$

We consider the system of homogeneous linear equations $C_{n(n+3)/2} X_n = 0$, namely,

$$\begin{cases} (b_{10} + z_{10}) x_{10} - a_{20} x_{20} = 0, \\ (b_{01} + z_{01}) x_{01} - x_{11} - a_{02} x_{02} = 0, \\ -a_{20} x_{10} + (b_{20} + z_{20}) x_{20} - a_{30} x_{30} = 0, \\ -x_{01} + (b_{11} + z_{11}) x_{11} - a_{21} x_{21} = 0, \\ -a_{02} x_{01} + (b_{02} + z_{02}) x_{02} - x_{12} - a_{03} x_{03} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n0} x_{n-1,0} + (b_{n0} + z_{n0}) x_{n0} = 0, \\ -a_{n-1,1} x_{n-2,1} + (b_{n-1,1} + z_{n-1,1}) x_{n-1,1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{0n} x_{0,n-1} + (b_{0n} + z_{0n}) x_{0n} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Let us multiply the equations (6) by $\bar{x}_{10}$, $\bar{x}_{01}$, ..., $\bar{x}_{0n}$, respectively, and add the resulting equations. This gives

$$\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 1}}^{n} (b_{rs} + z_{rs}) |x_{rs}|^2 - \sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 2, r \neq 1}}^{n} a_{rs} (x_{rs} \bar{x}_{r-1+\delta_{r0}, s-\delta_{r0}} + x_{r-1+\delta_{r0}, s-\delta_{r0}} \bar{x}_{rs}) - \sum_{s=1}^{n} (x_{1s} \bar{x}_{0s} + x_{0s} \bar{x}_{1s}) = 0, \tag{7}$$

where δ_{pq} is the Kronecker symbol. We put $\beta_{rs} = \operatorname{Im} b_{rs}$, $y_{rs} = \operatorname{Im} z_{rs}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, $\alpha_{rs} = \operatorname{Im} a_{rs}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r \neq 1$, $r+s \geq 2$, and suppose that

$$\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 1}}^{n} (\beta_{rs} + y_{rs}) |x_{rs}|^2 - \sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 2, r \neq 1}}^{n} \alpha_{rs} (x_{rs} \bar{x}_{r-1+\delta_{r0}, s-\delta_{r0}} + x_{r-1+\delta_{r0}, s-\delta_{r0}} \bar{x}_{rs}) > 0 \tag{8}$$

for

$$y_{rs} > 0, \quad r \geq 0, \ s \geq 0, \ 1 \leq r+s \leq n, \quad \sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 1}}^{n} |x_{rs}|^2 > 0. \tag{9}$$

Lemma 2. *For an arbitrary natural number n by conditions* (9) *the inequality* (8) *is equivalent to non-negative definite of the real quadratic form*

$$\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 1}}^{n} \beta_{rs} \xi_{rs}^2 - 2 \sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 2 \\ r \neq 1}}^{n} \alpha_{rs} \xi_{rs} \xi_{r-1+\delta_{r0}, s-\delta_{r0}} \geq 0, \tag{10}$$

where ξ_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, 1 \leq r+s \leq n$, are arbitrary real numbers.

Proof. Let n be an arbitrary natural number and let the inequality (8) holds for arbitrary complex numbers x_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, 1 \leq r+s \leq n$, such that the conditions (9) holds. In particular, the inequality (8) holds iff $x_{rs} = \xi_{rs}$, $r \geq 0, s \geq 0, 1 \leq r+s \leq n$. In the inequality (8) we replace the x_{rs} by the real numbers ξ_{rs} $(r \geq 0, s \geq 0, 1 \leq r+s \leq n)$ and pass to limit in the both parts of this inequality as $y_{rs} \to 0$ $(r \geq 0, s \geq 0, 1 \leq r+s \leq n)$. Then we obtain (10).

Let for an arbitrary natural number n the inequality (10) holds and let $x_{rs} = u_{rs} + iv_{rs}$, $r \geq 0$, $s \geq 0, 1 \leq r+s \leq n$. We then write the left-hand member of (8) in the form

$$\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 1}}^{n} \beta_{rs} u_{rs}^2 - 2 \sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 2 \\ r \neq 1}}^{n} \alpha_{rs} u_{rs} u_{r-1+\delta_{r0}, s-\delta_{r0}} + \sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 1}}^{n} \beta_{rs} v_{rs}^2 - 2 \sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 2 \\ r \neq 1}}^{n} \alpha_{rs} v_{rs} v_{r-1+\delta_{r0}, s-\delta_{r0}} + \sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \geq 1}}^{n} y_{rs} |x_{rs}|^2,$$

from which (8) follows by conditions (9). $\square$

We now make the following definition.

Definition. *The BCF* (1) *is said to be positive definite if the quadratic form* (10) *is non-negative definite for arbitrary natural number n and for all real values of ξ_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$.*

Theorem 1. *If the BCF* (1) *is positive definite, then its denominators $B_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, do not equal to zero for* $\operatorname{Im} z_{rs} > 0, r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$.

Proof. For each natural n the system of homogeneous linear equations (6) has the trivial solution (all variables equal to zero) iff $B_n(\mathbf{z}) \neq 0$. Since (7) is corollary of the system of equations (6), obviously the system of equations has only a trivial solution, if the conditions of theorem (7) holds iff $x_{rs} = 0, r \geq 0, s \geq 0, 1 \leq r+s \leq n$. Indeed, if (10) holds, then (8) holds via lemma 2, and thus (7) holds iff

$$\sum_{\substack{r,s=0\\r+s\geq 1}}^{n} |x_{rs}|^2 = 0$$

for each natural n. □

We shall now prove the following theorem, which furnishes a parametric representation for the coefficients of a positive definite BCF of special form.

Theorem 2. *The BCF* (1) *is positive definite iff both the following conditions are satisfied.*

A) The imaginary parts of the numbers b_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$ are all non-negative

$$\beta_{rs} = \operatorname{Im} b_{rs} \geq 0, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r+s \geq 1. \tag{11}$$

B) There exist numbers g_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$, such that

$$0 \leq g_{rs} \leq 1, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r+s \geq 1, \tag{12}$$

and

$$\alpha_{rs}^2 = \beta_{rs}\beta_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}}(1-g_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}})g_{rs}, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r \neq 1,\ r+s \geq 2, \tag{13}$$

where $\alpha_{rs} = \operatorname{Im} a_{rs}$, $r \geq 0, s \geq 0, r \neq 1, r+s \geq 2$, δ_{pq} is the Kronecker symbol.

Proof. Let n be an arbitrary natural number. Let arbitrary p and q be given, such that $p \geq 0$, $q \geq 0$, $1 \leq p+g \leq n$; put in (10) $\xi_{pq} \neq 0$ and $\xi_{rs} = 0$ otherwise. Then the inequality (10) we write in the form $\beta_{pq}\xi_{pq}^2 \geq 0$. It follows that the conditions (11) are necessary. Let q be an arbitrary number, $q \geq 0$, $\xi_{rq} \neq 0$, $r \geq 1$, and all other cases $\xi_{rs} = 0$. Then according to theorem 16.2 [8, pp. 67–68] for $s = q$ the conditions (12) and (13) are necessary, i.e., there exist the numbers g_{rq}, $r \geq 1$, such that $0 \leq g_{rq} \leq 1$, $r \geq 1$, and $\alpha_{rq}^2 = \beta_{rq}\beta_{r-1,q}(1-g_{r-1,q})g_{rq}$, $r \geq 2$. If $\xi_{0s} \neq 0$, $s \geq 1$, and all other cases ξ_{rs} equal to 0, then according to theorem 16.2 [8, pp. 67–68] for $r = 0$ the conditions (12) and (13) are also necessary.

Let the conditions (11)–(13) holds. Then

$$\sum_{\substack{r,s=0\\r+s\geq 1}}^{n} \beta_{rs}\xi_{rs}^2 - 2\sum_{\substack{r,s=0\\r+s\geq 2\\r\neq 1}}^{n} \alpha_{rs}\xi_{rs}\xi_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}} = \sum_{s=0}^{n-1} \beta_{1s}g_{1s}\xi_{1s}^2 + \sum_{\substack{r+s=n\\r,s\geq 0}} \beta_{rs}(1-g_{rs})\xi_{rs}^2$$

$$+\beta_{01}g_{01}\xi_{01}^2 + \sum_{\substack{r,s=0\\r+s\geq 2\\r\neq 1}}^{n}\left[\sqrt{\beta_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}}(1-g_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}})}\,\xi_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}} \pm \sqrt{\beta_{rs}g_{rs}}\,\xi_{rs}\right]^2,$$

where "+" is taken, if $\alpha_{rs} \leq 0$, and "−" is taken, if $\alpha_{rs} > 0$, from which (10) follows. □

By arguments similar to the proof of the theorem 4.6 [4, pp. 135–137], we can show that following theorem holds.

Theorem 3. *If for natural n the quadratic form* (10) *is non-negative definite, then the quadratic form*

$$\sum_{\substack{r,s=0\\r+s\geq 1}}^{n} \beta_{rs}\xi_{rs}^2 - 2\sum_{\substack{r,s=0\\r+s\geq 2\\r\neq 1}}^{n} \alpha'_{rs}\xi_{rs}\xi_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}}$$

is also non-negative definite for $|\alpha'_{rs}| \leq |\alpha_{rs}|$, $r \geq 0, s \geq 0, r \neq 1, 2 \leq r+s \leq n$.

Corollary. *In theorem 2 we may replace the conditions* (13) *by the following ones*

$$\alpha_{rs}^2 \leq \beta_{rs}\beta_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}}(1-g_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}})g_{rs}, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r \neq 1,\ r+s \geq 2, \tag{14}$$

where $0 \leq g_{rs} \leq 1, r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$.

Since $|a_{rs}^2| - \operatorname{Re}(a_{rs}^2) = 2\alpha_{rs}^2$ for each rs, $r \geq 0, s \geq 0, r \neq 1, r+s \geq 2$, then the conditions (14) we may write in the form

$$|a_{rs}^2| - \operatorname{Re}(a_{rs}^2) \leq 2\beta_{rs}\beta_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}}(1-g_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}})g_{rs}, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r \neq 1,\ r+s \geq 2, \tag{15}$$

where $0 \leq g_{rs} \leq 1, r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$.

2 THE EXAMPLES OF A POSITIVE DEFINITE BCF OF SPECIAL FORM

We consider fraction

$$\Phi_0 + \cfrac{1}{1+\Phi_1+\displaystyle\mathop{\mathrm{D}}_{s=2}^{\infty}\frac{a_{0s}}{1+\Phi_s}}, \quad \Phi_p = \cfrac{1}{1+\displaystyle\mathop{\mathrm{D}}_{r=2}^{\infty}\frac{a_{rp}}{1}}, \quad p \geq 0,$$

where a_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, r \neq 1, r+s \geq 2$, are complex constants. By an equivalent transformation we reduce its to the form

$$i\Psi_0 + \cfrac{i}{i-\Psi_1+\displaystyle\mathop{\mathrm{D}}_{s=2}^{\infty}\frac{-c_{0s}^2}{i-\Psi_s}}, \quad \Psi_p = \cfrac{1}{i+\displaystyle\mathop{\mathrm{D}}_{r=2}^{\infty}\frac{-c_{rp}^2}{i}}, \quad p \geq 0, \tag{16}$$

where $c_{rs}^2 = a_{rs}$, $r \geq 0, s \geq 0, r \neq 1, r+s \geq 2$. Than, taking into account that all $\beta_{rs} = 1$, the conditions (15) for BCF (16) we write in the form

$$|c_{rs}^2| - \operatorname{Re}(c_{rs}^2) \leq 2(1-g_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}})g_{rs}, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r \neq 1,\ r+s \geq 2, \tag{17}$$

where $0 \leq g_{rs} \leq 1, r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$. If we put $g_{rs} = 1/2$, $r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$, this reduces to the parabola regions

$$|c_{rs}^2| - \operatorname{Re}(c_{rs}^2) \leq 1/2, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r \neq 1,\ r+s \geq 2.$$

If the c_{rs}, $r \geq 0, s \geq 0, r \neq 1, r+s \geq 2$, are pure imaginary, then (17) reduces to

$$|c_{rs}^2| \leq (1-g_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}})g_{rs}, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r \neq 1,\ r+s \geq 2,$$

where $0 \leq g_{rs} \leq 1, r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1$.

CONCLUSION

An established connection between the positive definite BCF of special form and the certain quadratic form furnishes us new opportunities of approach to the convergence problem of the BCF of special form.

REFERENCES

[1] Antonova T.M. *On a simple circular set of absolute convergence of branched continued fractions of special form.* Carpathian Math. Publ. 2012, **4** (2), 165–174. (in Ukrainian)

[2] Baran O.E. *Even circular region of convergence of branched continued fractions with nonequivalent variables.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 2009, **52** (4), 73–80. (in Ukrainian)

[3] Bodnar D.I., Bubnyak M.M. *On the convergence of the 1-periodic branched continued fractions of special form.* Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2011, **8**, 5–16. (in Ukrainian)

[4] Bodnar D.I. Branched continued fraction. Naukova Dumka, Kiev, 1986. (in Russian)

[5] Bodnar D.I., Dmytryshyn R.I. *Some criteria of convergence of branched continued fractions with nonequivalent variables.* Bull. of Lviv Univ. Mech. Math. Series 2008, **68**, 28–36. (in Ukrainian)

[6] Dmytryshyn R.I. *An effective criteria of convergence of branched continued fractions with nonequivalent variables.* Sci. Bull. Chernivtsi Univ. Math. Series 2008, **374**, 44–49. (in Ukrainian)

[7] Dmytryshyn R.I. *Some region of convergence of multidimensional J-fractions with nonequivalent variables.* Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2011, **8**, 69–77. (in Ukrainian)

[8] Wall H.S. Analytic theory of continued fractions. Van Nostrand, New York, 1948.

Received 30.04.2013

Дмитришин Р.І. *Додатно визначені гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — C. 225–230.

Запропоновано дослідження класу гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, знаменники яких відмінні від нуля. Встановлено зв'язок такого дробу з певною квадратичною формою, що дає нові можливості для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

Ключові слова і фрази: додатно визначений гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду, квадратична форма.

Дмитришин Р.И. *Положительно определенные ветвящиеся цепные дроби специального вида* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — C. 225–230.

Предложены исследования класса ветвящихся цепных дробей специального вида, знаменатели которых отличны от нуля. Установлена связь такой дроби с определенной квадратичной формой, что дает новые возможности для исследования сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида.

Ключевые слова и фразы: положительно определенная ветвящаяся цепная дробь специального вида, квадратичная форма.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 519.21

ДОВГАЙ Б.В.

ОЦІНКА РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМУ РОЗВ'ЯЗКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ОРЛІЧЕВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Довгай Б.В. *Оцінка розподілу супремуму розв'язку гіперболічного рівняння з Орлічевою правою частиною* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — C. 231–241.

Ми розглядаємо гіперболічне рівняння з однорідними початковими і граничними умовами та Орлічевою правою частиною. За умов існування розв'язку у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду отримано оцінку розподілу супремуму розв'язку такої задачі. Наведено приклади строго Орлічевих випадкових полів, що задовольняють ці умови.

Ключові слова і фрази: гіперболічне рівняння, розподіл супремуму, Орлічеве випадкове поле.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.
E-mail: bogdov@gmail.com

ВСТУП

У роботі ми розглядаємо першу задачу математичної фізики для гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною. Такі задачі розглянуто в роботах [1]–[10]. В статті [10] були одержані достатні умови існування розв'язку такої задачі у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду в термінах коваріаційної функції строго Орлічевого випадкового поля, що стоїть в правій частині рівняння. В даній роботі за цих умов знаходимо оцінку розподілу супремуму розв'язку. Крім того, тут наведено приклади строго Орлічевих випадкових полів, що задовольняють ці умови.

1 ОЦІНКА РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМУ

Наступна теорема є частинним випадком теореми 2.2 та леми 2.3 з роботи [11].

Теорема 1 ([11]). *Нехай (T,ρ) — метричний (псевдометричний) компактний простір, $N(u)$ — метрична масивність простору (T,ρ), тобто мінімальне число замкнених куль радіуса u, що покривають (T,ρ), $X = \{X(t), t \in T\}$ — сепарабельний випадковий процес із простору $L_U(\Omega)$, де для U виконується g-умова. Нехай існує така функція $\sigma = \left\{\sigma(h), 0 \le h \le \sup\limits_{t,s\in T} \rho(t,s)\right\}$, що $\sigma(h)$ монотонно зростає, неперервна та $\sigma(0) = 0$ і $\sup\limits_{\rho(t,s)\le h} \|X(t) - X(s)\|_U \le \sigma(h)$. Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ виконується умова*

$$\int_0^{\varepsilon} \chi_U \left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty, \tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60G60, 60G17.

де

$$\chi_U = \begin{cases} n, & n < U(z_0) \\ C_U U^{(-1)}(n), & n \geq U(z_0), \end{cases} \tag{2}$$

$C_U = K(1+U(z_0))\max\{1, A\}$, z_0, K, A — *константи з означення g-умови, $\sigma^{(-1)}(u)$ — функція, обернена до $\sigma(h)$, то з імовірністю одиниця випадкова величина $\sup_{t\in T}|X(t)|$ належить простору $L_U(\Omega)$ та*

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\|_U \leq \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_0\theta}\chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du = B(t_0,\theta), \tag{3}$$

де t_0 — довільна точка з T, $w_0 = \sigma\left(\sup_{t\in T}\rho(t_0,t)\right)$, $0 < \theta < 1$. Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}. \tag{4}$$

Наслідок 1. *Візьмемо в теоремі 1 простір $T = \{0 \leq x \leq b,\ c \leq t \leq d\}$ з метрикою $\rho((x,t),(y,s)) = \max\{|x-y|, |t-s|\}$. Тоді умова (1) виконується, якщо для деякого $\varepsilon > 0$ виконується умова*

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du < \infty, \tag{5}$$

а

$$B(t_0,\theta) \leq \widetilde{B}(t_0,\theta) = \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_0\theta}\chi_U\left(\left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du,$$

та для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{\widetilde{B}(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}. \tag{6}$$

Доведення. Наслідок випливає з того, що в цьому випадку $N(u) \leq \left(\frac{b}{2u}+1\right)\left(\frac{d-c}{2u}+1\right)$. □

Нехай $T > 0$ — деяка стала, функція $q(x)$, $x \in [0,\pi]$, — така неперервно диференційовна функція, що $q(x) \geq 0$, $\xi(x,t)$, $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$, — вибірково неперервне з імовірністю 1 випадкове поле.

Розглянемо першу крайову задачу для неоднорідного гіперболічного рівняння з нульовими початковими та крайовими умовами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\xi(x,t), \quad x \in [0,\pi], \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \tag{8}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0. \tag{9}$$

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля

$$\frac{d^2X}{dx^2} - qX + \lambda X = 0, \tag{10}$$

$$X(0) = X(\pi) = 0. \tag{11}$$

Нехай $X_n(x)$ — ортонормовані з вагою ρ власні функції цієї задачі, а λ_n — відповідні власні значення. Будемо вважати, що λ_n занумеровані в порядку зростання. Завдяки обмеженням на q всі власні значення додатні і нуль не є власним значенням [12].

Позначимо $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, $B(x,y,t,s) = \mathsf{E}\xi(x,t)\xi(y,s)$, $(x,y,t,s) \in [0,\pi]^2 \times [0,T]^2$. Припустимо, що $B(0,y,t,s) = B(\pi,y,t,s) = 0$, $y \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$, $s \in [0,T]$; $B(x,0,t,s) = B(x,\pi,t,s) = 0$, $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$, $s \in [0,T]$.

Для кожної фіксованої пари $(t,s) \in [0,T]^2$ продовжимо функцію $B(x,y,t,s)$ як функцію від x, y на всю площину $\mathbb{R}^2$ так, щоб вона була періодичною функцією з періодом 2π по x та по y і щоб виконувались тотожності $B(-x,y,t,s) = -B(x,y,t,s) = B(x,-y,t,s)$. Внаслідок нашого припущення таке продовження можливе.

Позначимо

$$B_{i,j}(x,y,t,s) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}B(x,y,t,s), \quad 0 \leq i,j \leq 2;$$

$$\Delta_{2,\delta_1,\delta_2}B(x,y,t,s) = B(x+\delta_1,y+\delta_2,t,s) - B(x+\delta_1,y,t,s) - B(x,y+\delta_2,t,s) + B(x,y,t,s);$$

$$\Delta_{x,\delta}B(x,y,t,s) = B(x+\delta,y,t,s) - B(x,y,t,s);$$

$$\Delta_{y,\delta}B(x,y,t,s) = B(x,y+\delta,t,s) - B(x,y,t,s);$$

$$\widetilde{B}(x,y,t,s) = B(x,y,t,t) - B(x,y,t,s) - B(x,y,s,t) + B(x,y,s,s).$$

Теорема 2 ([10]). *Нехай у (7) $\xi(x,t)$ — центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g-умову (тобто $\exists z_0 \geq 0\ \exists K > 0\ \exists A > 0\ \forall x \geq z_0\ \forall y \geq z_0$: $U(x)U(y) \leq AU(Kxy)$). Нехай $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$, — неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$, така, що функція $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$. Припустимо, що при всіх $x \in [0,\pi]$, $y \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$, $s \in [0,T]$ існує неперервна похідна $\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}B(x,y,t,s)$ та для деяких неперервних функцій $\tau(\delta_1,\delta_2)$, $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$, та $\tau(\delta)$, $\delta \geq 0$, таких, що $\tau(\delta_1,\delta_2) > 0$ при $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\tau(0,\delta_2) = \tau(\delta_1,0) = 0$, $\tau(\delta_1,\delta_2)$ монотонно зростає по δ_1 та δ_2, $\tau(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\tau(0) = 0$, $\tau(\delta)$ монотонно зростає, виконуються умови:*

– *збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{m}\right)}{km}\varphi(k^2)\varphi(m^2) < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{km^2}\varphi(k^2)\varphi(m^2) < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k^2m}\varphi(k^2)\varphi(m^2) < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^2m^2}\varphi(k^2)\varphi(m^2) < \infty;$$

– *для довільного $\varepsilon > 0$*

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^2\right)dv < \infty; \tag{12}$$

– для всіх $0 \le i, j \le 1$ існують такі константи $C_{1,i,j} > 0$, $C_{2,i,j} > 0$, $C_{3,i,j} > 0$, що

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le s\le T}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dxdy \le C_{1,i,j}\tau(\delta_1,\delta_2),$$

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le s\le T}} \int_{0}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dx\right) dy \le C_{2,i,j}\tau(\delta),$$

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le s\le T}} \int_{0}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dy\right) dx \le C_{3,i,j}\tau(\delta);$$

– для всіх $0 \le i, j \le 1$ існують такі константи $M_{i,j} > 0$, що

$$\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right| \le \frac{M_{i,j}}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Тоді ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\frac{1}{\mu_n}\int_0^t \sin\mu_n(t-u)\zeta_n(u)\,du, \tag{13}$$

де

$$\zeta_n(t) = \int_0^{\pi} \xi(x,t)X_n(x)\,dx, \tag{14}$$

збігається рівномірно за ймовірністю в області $[0,\pi]\times[0,T]$ ($T > 0$ — деяка стала), рівномірно за ймовірністю збігаються ряди, отримані з (13) почленним диференціюванням один та два рази по t і один та два рази по x, та з імовірністю одиниця задача (7)–(9) має розв'язок, який можна зобразити у вигляді ряду (13).

Лема 1. *Нехай виконуються умови теореми 2. Позначимо*

$$V_N(x,t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} X_k(x)\frac{1}{\mu_k}\int_0^t \sin\mu_k(t-u)\zeta_k(u)du. \tag{15}$$

Тоді для всіх $h > 0$ при $x,y \in [0,\pi]$, $t,s \in [0,T]$, $N \ge 0$ має місце нерівність

$$\sup_{\substack{|x-y|\le h\\|t-s|\le h}} \left(\mathsf{E}|V_N(x,t)-V_N(y,s)|^2\right)^{1/2} \le D_N\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)}, \tag{16}$$

де

$$D_N = T\max\{L,2C_X\}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}C_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\right)^{1/2}$$

$$+C_X\Bigg(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}C_{k,m}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$

$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\Bigg)^{1/2},$$

L, C_X — константи, визначені в лемі 2 роботи [8], $C_{k,m} = \sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le s\le T}}|\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|$.

Доведення. Для будь-яких $x,y \in [0,\pi]$, $t,s \in [0,T]$, $N \ge 1$, маємо

$$\left(\mathsf{E}|V_N(x,t)-V_N(y,s)|^2\right)^{1/2} = \Bigg(\mathsf{E}\Bigg|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}(X_k(x)-X_k(y))\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du$$

$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}X_k(y)\left(\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du-\int_0^s\zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\right)\Bigg|^2\Bigg)^{1/2} \le A_1+A_2,$$

де

$$A_1 = \left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}(X_k(x)-X_k(y))\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du\right|^2\right)^{1/2},$$

$$A_2 = \left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}X_k(y)\left(\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du-\int_0^s\zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Позначимо $R_{k,m}(t,s) = \int_0^t\int_0^s \sin\mu_k(t-u)\sin\mu_m(s-v)\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)dvdu$. Тоді

$$A_1^2 \le \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}|X_k(x)-X_k(y)||X_m(x)-X_m(y)||R_{k,m}(t,t)|.$$

З лем 2, 3 роботи [8] випливає, що $|X_k(x)-X_k(y)| \le \max\{L,2C_X\}\frac{\varphi(\mu_k^2+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|x-y|}+v_0\right)}$. Крім того,

$$|R_{k,m}(t,s)| \le C_{k,m}\int_0^t\int_0^s|\sin\mu_k(t-u)\sin\mu_m(s-v)|dvdu \le T^2C_{k,m}.$$

Отже,

$$A_1^2 \le T^2\left(\max\{L,2C_X\}\right)^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}C_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\left(\varphi\left(\frac{1}{|x-y|}+v_0\right)\right)^{-2}.$$

$$A_2^2 \le \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}|X_k(y)||X_m(y)|\Bigg|\mathsf{E}\left(\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du-\int_0^s\zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\right)$$

$$\times\left(\int_0^t\zeta_m(v)\sin\mu_m(t-v)dv-\int_0^s\zeta_m(v)\sin\mu_m(s-v)dv\right)\Bigg|.$$

Нехай для визначеності $s \le t$. Тоді

$$\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du-\int_0^s\zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du$$

$$= \int_0^s\zeta_k(u)\left(\sin\mu_k(t-u)-\sin\mu_k(s-u)\right)du+\int_s^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du.$$

Отже, $A_2^2 \le C_X^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}d_{k,m}(s,t)$, де

$$d_{k,m}(s,t) = \Bigg|\mathsf{E}\left(\int_0^s\zeta_k(u)(\sin\mu_k(t-u)-\sin\mu_k(s-u))du+\int_s^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du\right)$$

$$\times\left(\int_0^s\zeta_m(v)(\sin\mu_m(t-v)-\sin\mu_m(s-v))dv+\int_s^t\zeta_m(v)\sin\mu_m(t-v)dv\right)\Bigg|.$$

При доведенні леми 2 з роботи [8] було показано, що

$$d_{k,m}(s,t) \le C_{k,m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Отже,

$$A_2^2 \le C_X^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}C_{k,m}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

□

Зауваження 1. *З леми 1 роботи [10] випливає, що за умов теореми 2 при $k \ge 1$ та $m \ge 1$ має місце нерівність*

$$C_{k,m} \le \widehat{C}_{k,m} = \sum_{i,j=0}^{1}\frac{C_q^{2-i-j}}{\mu_k^2\mu_m^2}\left(\frac{C_{1,i,j}\tau(\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{m})}{8\pi}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{LC_{2,i,j}\tau(\frac{\pi}{k})}{4m}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{LC_{3,i,j}\tau(\frac{\pi}{m})}{4k}+\frac{C_{G,i,j}}{km}\right), \quad (17)$$

де $C_q = \sup\limits_{0\le x\le\pi}|q(x)|$, $C_{G,i,j} = L^2\pi^2\max\limits_{\substack{x,y\in[0,\pi]\\ t,s\in[0,T]}}|B_{2i,2j}(x,y,t,s)|$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{x\in[0,\pi]\\ t\in[0,T]}}|V_N(x,t)|>\varepsilon\right\} \le \left(U\left(\frac{\varepsilon}{\widehat{B}_N(\theta)}\right)\right)^{-1}, \quad (18)$$

де

$$\widehat{B}_N(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_{0N}\theta}\chi_U\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{u}\right)-v_0\right)+1\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{u}\right)-v_0\right)+1\right)\right)du, \quad (19)$$

$$w_{0N} = \frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{\varphi\left(\frac{1}{\max\{\pi,T\}}+v_0\right)},$$

$$\widehat{D}_N = T\max\{L,2C_X\}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\widehat{C}_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\right)^{1/2}$$
$$+C_X\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\widehat{C}_{k,m}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)\right.$$
$$\left.+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\right)^{1/2},$$

C_Δ *— константа з означення строго Орлічевої сім'ї випадкових величин.*

Доведення. Покладемо в теоремі 1 $t_0 = (0,0)$. Тоді $\|X(t_0)\|_U = \|V_N(0,0)\|_U = 0$. В нашому випадку $b=\pi$, $d-c=T$, $\sigma(h) = \frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{\varphi(\frac{1}{h}+v_0)}$, $h>0$. Тому $\sigma^{(-1)}(u) = \frac{1}{\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{u}-v_0\right)}$, $u>0$.

Умова (5) набуває вигляду

$$\int_0^{\varepsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{u}\right)-v_0\right)+1\right)\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{u}\right)-v_0\right)+1\right)\right)<\infty$$

і виконується, бо виконується умова (12). Зауважимо, що

$$w_0 = \sigma(\max\{\pi,T\}) = \frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{\varphi\left(\frac{1}{\max\{\pi,T\}}+v_0\right)} = w_{0N}.$$

Крім того, за лемою 1 та зауваженням 1 для всіх $h>0$

$$\sup_{\max\{|x-y|,|t-s|\}\le h}\|V_N(x,t)-V_N(y,s)\|_U$$
$$\le C_\Delta\sup_{\max\{|x-y|,|t-s|\}\le h}\left(\mathsf{E}\left(V_N(x,t)-V_N(y,s)\right)^2\right)^{1/2}\le\sigma(h).$$

Тому твердження теореми випливає з теореми 1 та наслідку 1. □

2 Приклади

Наведемо приклад випадкового поля $\xi(x,t)$, для якого виконуються умови теореми 2, а, отже, і оцінка теореми 3.

Приклад 1. *Нехай $U(x)=|x|^p$, тобто $L_U(\Omega)=L_p(\Omega)$, при $p>4$. Розглянемо випадкове поле $\xi(x,t)\in L_p(\Omega)$, $p>4$, що можна представити у вигляді*

$$\xi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\eta_k a_k f_k(x)\varphi_k(t),$$

де η_k, $k\ge1$, — однаково розподілені незалежні центровані строго Орлічеві випадкові величини, $0\le x\le\pi$, $0\le t\le T$, $f_k(x)$ — двічі неперервно диференційовні, $\varphi_k(t)$ — неперервні функції, a_k — деякі сталі, $f_k(0)=f_k(\pi)=0$, $\mathsf{E}\eta_k^2=m^2$, $\mathsf{E}\eta_k=0$.

Тоді коваріаційна функція має вигляд

$$B(x,y,t,s) = \mathsf{E}\xi(x,t)\xi(y,s) = m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 f_k(x)f_k(y)\varphi_k(t)\varphi_k(s).$$

Нехай $\forall 0\le i\le1$, $\forall k\ge1$ мають місце нерівності

$$|\varphi_k(t)-\varphi_k(s)|\le d_{\varphi k}|t-s|^{\beta},\ \ \frac{2}{p}<\beta<\frac{1}{2};\qquad |\varphi_k(t)|\le D_{\varphi k};$$
$$|f_k^{(2i)}(x+\delta)-f_k^{(2i)}(x)|\le d_{fik}\delta^{\alpha},\ \ \alpha>2\beta;\qquad |f_k^{(2i)}(x)|\le D_{fik};$$

та для всіх $0\le i,j\le1$ збігаються ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2 d_{fik}\max\{d_{fjk},D_{fjk}\}<\infty;\qquad \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2d_{\varphi k}^2D_{fik}D_{fjk}<\infty.$$

Візьмемо $v_0 = 0$; $\varphi(\lambda) = \lambda^\beta$, $\lambda > 0$, $\dfrac{2}{p} < \beta < \dfrac{1}{2}$ $(p > 4)$; $\tau(\delta_1, \delta_2) = (\delta_1\delta_2)^\alpha$, $\tau(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha > 2\beta$. *Тоді*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{m}\right)}{km}\varphi(k^2)\varphi(m^2) = \pi^{2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(km)^{1+\alpha-2\beta}} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{km^2}\varphi(k^2)\varphi(m^2) = \pi^{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\alpha-2\beta}m^{2-2\beta}} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k^2m}\varphi(k^2)\varphi(m^2) = \pi^{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2-2\beta}m^{1+\alpha-2\beta}} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2m^2}\varphi(k^2)\varphi(m^2) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2-2\beta}m^{2-2\beta}} < \infty.$$

Оскільки $U(x) = |x|^p$, $x \in \mathbb{R}$, $p > 4$; $\varphi(\lambda) = \lambda^\beta$, $\lambda > 0$, $\dfrac{2}{p} < \beta < \dfrac{1}{2}$; *то* $U^{(-1)}(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $x \geq 0$; $\varphi^{(-1)}(x) = \lambda^{\frac{1}{\beta}}$, $\lambda > 0$. *Тоді* $\forall \varepsilon > 0$ *при* $\beta > \frac{2}{p}$

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)}\left(\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^2\right)dv = \int_0^\varepsilon \left(\left(\frac{1}{v^{1/\beta}}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}} dv = \int_0^\varepsilon \frac{1}{v^{\frac{2}{\beta p}}}dv = \frac{\varepsilon^{1-\frac{2}{\beta p}}}{1-\frac{2}{\beta p}} < \infty.$$

Розглянемо $B_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 f_k^{(2i)}(x) f_k^{(2j)}(y)\varphi_k(t)\varphi_k(s)$. *Тоді*

$$\Delta_{2,\delta_1,\delta_2}B_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\varphi_k(t)\varphi_k(s)\left(f_k^{(2i)}(x+\delta_1) - f_k^{(2i)}(x)\right)\left(f_k^{(2j)}(y+\delta_2) - f_k^{(2j)}(y)\right),$$

$$\Delta_{x,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\varphi_k(t)\varphi_k(s)(f_k^{(2i)}\left(x+\delta\right) - f_k^{(2i)}(x)\Big)\, f_k^{(2j)}(y),$$

$$\Delta_{y,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\varphi_k(t)\varphi_k(s)f_k^{(2i)}(x)\left(f_k^{(2j)}(y+\delta) - f_k^{(2j)}(y)\right),$$

$$\widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 f_k^{(2i)}(x)f_k^{(2j)}(y)\left(\varphi_k(t) - \varphi_k(s)\right)^2.$$

За наших умов $\forall 0 \leq i,j \leq 1$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik}\max\{d_{fjk}, D_{fjk}\} < \infty$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik}D_{fjk} < \infty$. *Тоді*

$$\left|\Delta_{2,\delta_1,\delta_2}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| \leq (\delta_1\delta_2)^\alpha m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik}d_{fjk},$$

$$\left|\Delta_{x,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| \leq \delta^\alpha m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik}D_{fjk},$$

$$\left|\Delta_{y,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| \leq \delta^\alpha m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 D_{\varphi k}^2 D_{fik}d_{fjk},$$

$$|\widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)| \leq |t-s|^{2\beta}m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik}D_{fjk}.$$

Отже,

$$\sup_{\substack{0\leq t\leq T\\ 0\leq s\leq T}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{2,\delta_1,\delta_2}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right|dxdy \leq 4\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2 d_{fik}d_{fjk}\cdot(\delta_1\delta_2)^\alpha,$$

$$\sup_{\substack{0\leq t\leq T\\ 0\leq s\leq T}}\int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{x,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right|dx\right)dy \leq 2\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2 d_{fik}D_{fjk}\cdot\delta^\alpha,$$

$$\sup_{\substack{0\leq t\leq T\\ 0\leq s\leq T}}\int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{y,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right|dy\right)dx \leq 2\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2 D_{fik}d_{fjk}\cdot\delta^\alpha,$$

$$\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right| \leq \pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2d_{\varphi k}^2 D_{fik}D_{fjk}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{|t-s|}\right)^{2\beta}}.$$

Таким чином, умови теореми 2 виконуються для $v_0 = 0$; $\varphi(\lambda) = \lambda^\beta$, $\frac{2}{p} < \beta < \frac{1}{2}$; $\tau(\delta_1,\delta_2) = (\delta_1\delta_2)^\alpha$, $\tau(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha > 2\beta$;

$$C_{1,i,j} = 4\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2 d_{fik}d_{fjk}, \qquad C_{2,i,j} = 2\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2 d_{fik}D_{fjk},$$

$$C_{3,i,j} = 2\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2 D_{fik}d_{fjk}, \qquad M_{i,j} = \pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2d_{\varphi k}^2 D_{fik}D_{fjk}.$$

Виберемо тепер конкретний процес $\xi(x,t)$, для якого виконуються умови прикладу 1.

Приклад 2. *Розглянемо* $\xi(x,t) \in L_5(\Omega)$ *та однаково розподілені незалежні строго Орлічеві випадкові величини* η_k, *для яких* $\mathsf{E}\eta_k^2 = 1$, $\mathsf{E}\eta_k = 0$. *Припустимо, що випадковий процес* $\xi(x,t)$ *записується у вигляді* $\xi(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k\dfrac{1}{k^4}\sin kx\cos kt$, *де* $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq t \leq T$.

Тобто $p = 5$, $a_k = \frac{1}{k^4}$, $m = 1$, $\varphi_k(t) = \cos kt$, $f_k(x) = \sin kx$, $f_k^{(2)}(x) = (\sin kx)'' = (k\cos kx)' = -k^2\sin kx$.

Зауважимо, що оскільки $\forall x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leq |x|$, *то при* $\frac{2}{5} < \beta < \frac{1}{2}$ *для* $|x| \leq 1$: $|\sin x| \leq |x| \leq |x|^\beta$; *для* $|x| > 1$: $|\sin x| \leq 1 \leq |x|^\beta$; *тобто* $|\sin x| \leq |x|^\beta$ *при* $x \in \mathbb{R}$.

Покладемо $\beta = \frac{3}{7}$, $\alpha = 1$. *Тоді* $\frac{2}{5} < \beta < \frac{1}{2}$, $\alpha > 2\beta$.

$$f_k^{(2i)}(x) = (-1)^ik^{2i}\sin kx,\ 0 \leq i \leq 1;$$

$$\left|f_k^{(2i)}(x+\delta) - f_k^{(2i)}(x)\right| = \left|(-1)^ik^{2i}\sin k(x+\delta) - (-1)^ik^{2i}\sin kx\right|$$

$$= k^{2i}\left|\sin kx(x+\delta) - \sin kx\right| = 2k^{2i}\left|\sin\frac{k\delta}{2}\cos\frac{k(2x+\delta)}{2}\right|$$

$$\leq 2k^{2i}\left|\sin\frac{k\delta}{2}\right| \leq 2k^{2i}\frac{k\delta}{2} = k^{1+2i}\delta;$$

$$\left|f_k^{(2i)}(x)\right| = k^{2i}|\sin kx| \leq k^{2i};$$

$$|\varphi_k(t) - \varphi_k(s)| = |\cos kt - \cos ks| = 2\left|\sin\frac{k(t-s)}{2}\sin\frac{k(t+s)}{2}\right|$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{k(t-s)}{2}\right| \leq 2\left(\frac{k|t-s|}{2}\right)^{\frac{3}{7}} = 2^{\frac{4}{7}}k^{\frac{3}{7}}|t-s|^{\frac{3}{7}};$$

$$|\varphi_k(t)-\varphi_k(s)| = |\cos kt - \cos ks| = 2\left|\sin\frac{k(t-s)}{2}\sin\frac{k(t+s)}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{k(t-s)}{2}\right|$$
$$\le 2\left(\frac{k|t-s|}{2}\right)^{\frac{3}{7}} = 2^{\frac{4}{7}}k^{\frac{3}{7}}|t-s|^{\frac{3}{7}};$$
$$|\varphi_k(t)| = |\cos kt| \le 1.$$

Отже,

$$d_{fik} = k^{1+2i};\ d_{\varphi k} = 2^{\frac{4}{7}}k^{\frac{3}{7}};\ D_{fik} = k^{2i};\ D_{\varphi k} = 1.$$

Оскільки $a_k = \frac{1}{k^4}$, *то при* $0 \le i,j \le 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik}\max\{d_{fjk}, D_{fjk}\} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{1+2i}k^{1+2j}}{k^8} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty;$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik}D_{fjk} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{4}{7}}k^{\frac{3}{7}}k^{2i}k^{2j}}{k^8} \le 2^{\frac{4}{7}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3+\frac{4}{7}}} < \infty$$

і умови теореми 2 виконуються для $\varphi(\lambda) = \lambda^{\frac{3}{7}};\ \tau(\delta_1,\delta_2) = \delta_1\delta_2;\ \tau(\delta) = \delta.$

Висновки

За умов існування розв'язку гіперболічного рівняння з нульовими початковими та граничними умовами та строго Орлічевою випадковою правою частиною у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду знайдено оцінку розподілу супремуму розв'язку рівняння. Наведено приклади строго Орлічевих випадкових полів, що задовольняють ці умови.

References

[1] Dovhai B.V. *Justification of the Fourier method for an inhomogeneous hyperbolic equation with random right-hand side.* Ukrainian Math. J. 2004, **56** (5), 616–624. (in Ukrainian)

[2] Dovhai B.V. *Properties of a Solution of an Inhomogeneous Hyperbolic Equation with Random Right-Hand Side.* Ukrainian Math. J. 2005, **57** (4), 474–482. (in Ukrainian)

[3] Dovhai B.V. *Solving hyperbolic equations with Gaussian right-hand side of a special form by Fourier method.* Bull. Kyiv Univ., Phys. Math. Series 2005, **3**, 31–36. (in Ukrainian)

[4] Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. *The condition for application of Fourie method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right hand side.* Random operators and stochastic equations 2005, **13** (3), 281–296. doi:10.1515/156939705774286074

[5] Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. *Properties of solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right side.* Random operators and stochastic equations 2009, **17** (3), 221–241. doi:10.1515/ROSE.2009.016

[6] Dovhai B.V. *Generalized solutions of hyperbolic equations with φ-subgaussian right-hand side.* Theory of Probability and Mathematical Statistics 2009, **81**, 25–30. (in Ukrainian)

[7] Dovhai B.V. *Simulation of solution of hyperbolic equations.* Bull. Kyiv Univ., Phys. Math. Series 2011, **3**, 18–23. (in Ukrainian)

[8] Dovhai B.V. *Hyperbolic equations with Orlicz right-hand side.* Sci. Bull. Uzhgorod Univ., Math. Inform. Series 2011, **22** (2), 64–78. (in Ukrainian)

[9] Dovhai B.V. *Generalized solutions of the hyperbolic equation with Orlicz right part.* Bull. Kyiv Univ., Phys. Math. Series 2012, **1**, 13–17. (in Ukrainian)

[10] Dovhai B.V. *The equations of string oscillation with Orlicz right part.* Sci. Bull. Uzhgorod Univ., Math. Inform. Series 2013, **24** (1), 34–45. (in Ukrainian)

[11] Kozachenko Yu.V., Perestyuk M.M. *On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables. I.* Ukrainian Math. J. 2007, **59** (12), 1850–1869. doi:10.1007/s11253-008-0030-y (translation of Ukrainian Math. Zhurn. 2007, **59** (12), 1647–1659 (in Ukrainian))

[12] Polozhii G.N. Equations of mathematical physics. Vysshaya Shkola, Moscow, 1964. (in Russian)

Надійшло 25.08.2013

Dovhai B.V. *The estimation of supremum distribution of solution of hyperbolic equations with Orlicz right side.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 231–241.

We consider the hyperbolic equation with homogeneous initial and boundary conditions and Orlicz right side. An estimate of supremum distribution of the problem solution is obtained in case of existence of a solution in the form of uniformly convergent in probability series. Examples of strictly Orlicz random fields that satisfy these conditions are showed.

Key words and phrases: hyperbolic equation, supremum distribution, Orlicz random field.

Довгай Б.В. *Оценка распределения супремума решения гиперболического уравнения с Орличевой правой частью* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 231–241.

Рассматривается гиперболическое уравнение с однородными начальными и граничными условиями и Орличевой правой частью. В условиях существования решения в виде равномерно сходящегося по вероятности ряда получена оценка распределения супремума решения такой задачи. Приведены примеры строго Орличевых случайных полей удовлетворяют этим условиям.

Ключевые слова и фразы: гиперболическое уравнение, распределение супремума, Орличевое случайное поле.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 512.64

Заторский Р., Пылыпив В., Гулька С.

О НЕКОТОРЫХ СВЯЗАННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Заторский Р., Пылыпив В., Гулька С. *О некоторых связанных между собой перечислительных задачах* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 242–248.

Работа посвящена перечислению разбиений некоторых классов мультимножеств, n-вершинных регулярных графов второй степени и битрансверсалей квадратных матриц n-го порядка.

Ключевые слова и фразы: матрица, битрансверсаль, остовный 2-граф, регулярный граф, мультимножество.

Прикарпатский национальный университет имени Василя Стефаника, Ивано-Франковск, Украина
E-mail: romazz@rambler.ru (Заторский Р.)

Вступление

Перечислительные методы комбинаторной математики являются исторически первыми и центральными методами комбинаторной теории [1]. Они одинаково эффективно применяются в различных областях дискретной математики. В настоящей статье изучается связь между некоторыми комбинаторными задачами теории графов, теории матриц и теории мультимножеств.

Классической задачей комбинаторики множеств является задача о перечислении их разбиений на подмножества [2]. Аналогичные задачи для мультимножеств почти не исследованы. Поэтому любые, хотя бы частичные, результаты в этом направлении исследований важны. Одной из таких задач является задача перечисления всех разбиений мультимножества $\{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2\}$ в сумму двухэлементных множеств.

Перечисление Кэли [3] изомеров насыщенных углеродов C_nH_{2n+2} и исследование Кирхгофом [4] электрических цепей при помощи теории графов сыграли важную роль в химии изомеров и теории электрических цепей. Следовательно, важным направлением комбинаторной математики является перечисление различных классов помеченных и непомеченных графов [5], например, задача о перечислении всех регулярных n-вершинных помеченных графов и мультиграфов степени 2.

При построении различных функций матриц приходится иметь дело с перечислением различного рода трансверсалей. Например, при построении, так называемых, бидетерминантов и биперманентов квадратных матриц, аналогичных детерминантам и перманентам возникает задача о перечислении всех $T(n)$ битрансверсалей квадратных матриц — набора $2n$ элементов квадратной матрицы n-го порядка, в который входит по два элемента из каждой строчки и каждого столбца этой матрицы. Эта задача имеет

2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.

длинную историю. В 1966 году индийские математики Г. Ананд, В.С. Думир и Г. Гупта [6] получили рекуррентное соотношение

$$T(n) = \frac{n(n-1)^2}{2}\left((2n-3)T(n-2) + (n-2)^2T(n-3)\right),$$

которое в работе [7] получило вид $T(n) = \frac{n(n-1)}{2}\left(2T(n-1) + (n-1)T(n-2)\right)$. В. Тараканов [8] получил выражение $T(n)$ с помощью неупорядоченных разбиений натурального числа n :

$$T(n) = \sum_{2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{(n!)^2}{\prod_{r=2}^{n} \lambda_r!(2r)^{\lambda_r}},$$

а Д. Кнут — асимптотическую формулу $T(n) \sim 2\sqrt{\pi}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n-\frac{1}{2}}$.

Битрансверсали квадратных матриц интересны также тем, что с их помощью можно строить дважды стохастические матрицы.

В статье изучаются связи битрансверсалей квадратных матриц с регулярными графами второй степени и некоторым классом мультимножеств. Также получено выражение числа битрансверсалей квадратной матрицы через параперманент треугольной матрицы.

1 Предварительные сведения

Напомним некоторые понятия и утверждения необходимые для понимания статьи.

1.1 Трансверсали и матрицы. Парафункции треугольных матриц

Понятие трансверсали является важным понятием комбинаторного анализа. В общем случае под $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$*-трансверсалью упорядоченного семейства* $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ *подмножеств множества* $A \neq \emptyset$, *называют упорядоченное семейство* $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ *подмножеств этого множества, удовлетворяющих условиям:*

$$T_i \subseteq S_i, \quad |T_i| = t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad T_i \cap T_j = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Если в этом определении положить $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1$, то получим обыкновенную $(1, 1, \ldots, 1)$-трансверсаль, которую в литературе называют *системой различных представителей*. Если, кроме этого, положить $S_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е. рассматривать некоторую матрицу

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем считать, что вторые индексы элементов в $(1, 1, \ldots, 1)$-трансверсали не должны совпадать, то получим набор n элементов, взятых по одному из каждой строчки и каждого столбца матрицы. Такой набор называют трансверсалью матрицы.

Определение 1.1. *Набор элементов квадратной матрицы, взятых по два из каждой строчки и каждого столбца, назовем битрансверсалью этой матрицы.*

Отметим также, что при построении функций треугольных матриц (парадетерминанта и параперманента) используется понятие *монотрансверсали*.

Пусть K — некоторое числовое поле.

Определение 1.2. *Треугольную таблицу*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

чисел числового поля K назовем треугольной матрицей, элемент a_{11} — верхним элементом этой треугольной матрицы, а число n — ее порядком.

Каждому элементу a_{ij} треугольной матрицы (1) поставим в соответствие $(i-j+1)$ элементов a_{ik}, $k \in \{j, ..., i\}$, которые назовем *производными элементами* треугольной матрицы, порожденными *ключевым элементом* a_{ij}. Ключевой элемент треугольной матрицы одновременно является и его производным элементом. Произведение всех производных элементов, порожденных ключевым элементом a_{ij}, обозначим через $\{a_{ij}\}$ и назовем *факториальным произведением* этого ключевого элемента, т.е.

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Определение 1.3. *Если A — треугольная матрица (1), то справедливы равенства:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

где суммирование производится по множеству натуральных решений уравнения $p_1 + \ldots + p_r = n$.

Определение 1.4. *Каждому элементу a_{ij} заданной треугольной матрицы (1) поставим в соответствие треугольную матрицу с этим элементом в левом нижнем углу, которую назовем углом заданной треугольной матрицы и обозначим через $R_{ij}(A)$.*

Очевидно, что угол $R_{ij}(A)$ является треугольной матрицей $(i-j+1)$–го порядка. В угол $R_{ij}(A)$ входят только те элементы a_{rs} треугольной матрицы (1), индексы которых удовлетворяют соотношениям $j \leqslant s \leqslant r \leqslant i$.

Ниже мы будем считать, что

$$\operatorname{ddet}(R_{01}(A)) = \operatorname{ddet}(R_{n,n+1}(A)) = \operatorname{pper}(R_{01}(A)) = \operatorname{pper}(R_{n,n+1}(A)) = 1.$$

Теорема 1 (Разложение парафункций по элементам последней строчки). *Справедливы следующие тождества:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n+s} \{a_{ns}\} \cdot \operatorname{ddet}(R_{s-1,1}), \qquad \operatorname{pper}(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} \cdot \operatorname{pper}(R_{s-1,1}).$$

Более детально с этими и другими понятиями и утверждениями теории функций треугольных матриц можно познакомиться в [9].

1.2 Графы и циклы. Мультимножества и их разбиения

Граф называется *помеченным*, если все его вершины отличаются одна от другой какими-либо различными пометками, например, перенумерованы первыми натуральными числами. В противном случае граф называют *непомеченным*.

Замечание 1.1. *Помеченный граф при поворотах и симметриях не изменяется.*

Если все вершины графа имеют одинаковую степень r, то такой граф называют *регулярным* графом степени r.

Определение 1.5. *Мультимножеством A называют любой неупорядоченный набор элементов некоторого множества $[A]$, которое, в свою очередь, называют базисом мультимножества A.*

Определение 1.6. *Если мультимножество A состоит из k_1 элементов a_1, k_2 элементов a_2, $\ldots, k_n$ элементов a_n, то считают, что это мультимножество имеет первичную спецификацию $S(A) = [a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}]$ и для удобства мультимножество A записывают в каноническом виде $A = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}$. Числа k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, называют показателями первичной спецификации мультимножества A.*

Под суммой двух мультимножеств $A = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_n^{a_n}\}$ и $B = \{x_1^{b_1}, x_2^{b_2}, \ldots, x_n^{b_n}\}$ понимают мультимножество

$$A + B = \{x_1^{a_1+b_1}, x_2^{a_2+b_2}, \ldots, x_n^{a_n+b_n}\}.$$

В связи с операцией *суммы мультимножеств* возникает задача перечисления всех *разбиений мультимножества* на ее подмультимножества. Эта задача обобщает аналогичную классическую задачу о разбиениях множества на подмножества.

2 Перечисление n-вершинных регулярных графов степени 2

Очевидно, что n-вершинный регулярный граф степени 2 состоит из одного или нескольких циклов без общих вершин. Следовательно между всеми непомеченными регулярными n-вершинными графами степени 2 и целыми неотрицательными решениями уравнения

$$3\lambda_3 + 4\lambda_4 + \ldots + n\lambda_n = n,$$

где λ_i — количество циклов длины i, существует взаимнооднозначное соответствие. Например, существует четыре непомеченные регулярные графы степени 2 с девятью вершинами: цикл длины 9, два цикла длины 3 и 6, два цикла длины 4 и 5 и три цикла длины 3. Этим регулярным графам соответствуют четыре целые неотрицательные решения

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0, \lambda_9 = 1,$$

$$\lambda_3 = \lambda_6 = 1, \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0,$$

$$\lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0, \lambda_4 = \lambda_5 = 1,$$

$$\lambda_3 = 3, \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0$$

уравнения

$$3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 5\lambda_5 + 6\lambda_6 + 7\lambda_7 + 8\lambda_8 + 9\lambda_9 = 9. \qquad (2)$$

Если же рассматривать также непомеченные регулярные мультиграфы, то уравнение (2) следовало бы заменить уравнением

$$2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 5\lambda_5 + 6\lambda_6 + 7\lambda_7 + 8\lambda_8 + 9\lambda_9 = 9$$

и к перечисленным выше наборам циклов следовало бы добавить также наборы, соответствующие решениям:

$$\lambda_2 = \lambda_7 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0,$$

$$\lambda_2 = 2, \lambda_5 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9,$$

$$\lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0.$$

Предложение 2.1. *Существует*

$$\frac{n!}{2!^{\lambda_2}(\lambda_2)!3!^{\lambda_3}(\lambda_3)!\cdot\ldots\cdot n!^{\lambda_n}(\lambda_n)!}$$

различных разбиений n-элементного множества на λ_2 подмножества мощности 2, λ_3 подмножества мощности 3 и т.д. λ_n подмножеств мощности n.

Очевидно, что если учитывать порядок элементов, то каждому такому подмножеству мощности $k, k \geq 3$, можно сопоставить некоторый граф, являющийся циклом длины k.

Подсчитаем количество помеченных циклов длины k. Зафиксируем некоторую вершину цикла и припишем ей пометку 1. Остальные $(k-1)$ вершины можно пометить $(k-1)!$ способами. Однако среди полученных помеченных циклов, в силу замечания 1.1, будет ровно $(k-1)!/2$ одинаковых пар. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Двухвершинный цикл можно пометить одним способом; k-вершинный цикл (длины $k, k > 2$) можно пометить $\frac{(k-1)!}{2}$ различными способами.*

Следовательно λ_k циклов длины $k, k > 2$, можно пометить $\frac{(k-1)!^{\lambda_k}}{2^{\lambda_k}}$ различными способами и справедлива

Теорема 1. *Число регулярных n-вершинных помеченных графов степени 2 равно*

$$\sum_{3\lambda_3+4\lambda_4+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_3!3!^{\lambda_3}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n!^{\lambda_n}} \cdot \frac{2!^{\lambda_3}3!^{\lambda_4}\cdot\ldots\cdot(n-1)!^{\lambda_n}}{2^{\lambda_3+\lambda_4+\ldots+\lambda_n}}$$

$$= \sum_{3\lambda_3+4\lambda_4+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\prod_{r=3}^{n}\lambda_r!(2r)^{\lambda_r}}. \qquad (3)$$

Замечание 2.1. *С учетом мультиграфов формула* (3) *примет вид*

$$\sum_{2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!2^{\lambda_2}}{\prod_{r=2}^{n}\lambda_r!(2r)^{\lambda_r}} \qquad (4)$$

Замечание 2.2. *Очевидно, что число* (3) *регулярных n-вершинных помеченных графов степени 2 совпадает с числом остовных регулярных подграфов степени 2 полного n-вершинного графа.*

3 Перечисление битрансверсалей квадратной матрицы и разбиений мультимножества $\{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2\}$ на двухэлементные множества

В приведенной ниже матрице элементы битрансверсали выделены жирным шрифтом

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \mathbf{a_{26}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & \mathbf{a_{42}} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \mathbf{a_{54}} & \mathbf{a_{55}} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & \mathbf{a_{65}} & \mathbf{a_{66}} \end{pmatrix}.$$

Выпишем построчно последовательность элементов выделенной битрансверсали

$$(a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{26}, a_{32}, a_{33}, a_{42}, a_{44}, a_{54}, a_{55}, a_{65}, a_{66}).$$

Очевидно, что при построении битрансверсали последовательность первых индексов ее элементов можно зафиксировать в виде $(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6)$. Тогда каждая битрансверсаль этой матрицы будет взаимно однозначно связана с упорядоченной последовательностью шести пар вторых индексов ее элементов. Для выделенной выше трансверсали получим упорядоченную последовательность неупорядоченных двухэлементных множеств

$$(\{1,3\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}),$$

сумма которых равна мультимножеству $\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\}$. Каждая пара определяет два различные элементы некоторой строчки.

Если, в общем случае, числам $1, 2, \ldots, n$ сопоставить вершины графа, а парам чисел — ребра графа, то получим набор циклов. Действительно, всем одинаковым парам двухэлементных множеств соответствуют два параллельные ребра. Если же среди оставшихся пар больше нет одинаковых, то очевидно, что каждой оставшейся вершине инцидентны два различные ребра. Так как степень каждой оставшейся вершины равна двум, то они образуют определенный набор циклов. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Число различных регулярных n-вершинных помеченных графов и мультиграфов степени 2 равно числу всех различных неупорядоченных разбиений мультимножества $\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ в сумму двухэлементных множеств, среди которых допускаются и одинаковые двухэлементные множества.*

При помощи этих неупорядоченных разбиений мультимножества $\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ на двухэлементные множества можно построить все битрансверсали квадратной матрицы n-го порядка. Для этого достаточно образовать все различные перестановки компонент этого разбиения. Так как все компоненты разбиений, за исключением λ_2 пар компонент, различны, то для получения числа всех битрансверсалей в формуле (4) необходимо добавить множитель $\frac{n!}{2^{\lambda_2}}$. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *[8]. В квадратной матрице n-го порядка существует всего*

$$\sum_{2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\prod_{r=2}^{n}\lambda_r!(2r)^{\lambda_r}}$$

различных битрансверсалей.

Теорема 5. *Число битрансверсалей $T(n+1), n = 2,3,\ldots,$ квадратной матрицы равно*

$$T(n+1) = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 & & & & & \\ \frac{3}{2} & 3\cdot 4 & & & & \\ 0 & \frac{4}{2} & 4\cdot 5 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)n & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{n}{2} & n(n+1) \end{bmatrix}_{n-1}. \quad (5)$$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из разложения параперманента в равенстве (5) по элементам последней строчки.

References

[1] Gavrilov G.P., Liskovets V.A., Permiakov P.P., Selivanov B.I. On some trends of the theory of enumeration. In: Gavrilov G.P. (Ed.) Enumeration problems of combinatorial analysis. Mir, Moscow, 1979, 336–362. (in Russian)

[2] Aigner M. Combinatorial Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidellberg, 1997.

[3] Cayley A. *On the mathematical theory of isomers.* Philosophical Magazine 1874, **47** (314), 444–446. doi:10.1080/14786447408641058; Coll. Math. Papers 1896, **9**, 202–204. doi:10.1017/CBO9780511703751.032

[4] Kirchhoff G. *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird.* Ann. Phys. Chem. 1847 **72**, 497–508.

[5] Harary F. Graph Theory. Westview Press, Boulder, Colorado, 1994.

[6] Anand H., Dumir V.C., Hupta H. *A combinatorial distribution problem.* Duke Math. J. 1966, **33** (4), 757–769. doi:10.1215/S0012-7094-66-03391-6

[7] Good I.J., Grook J.F. *The enumeration of arrays and generalization related to contingency tables.* Discrete Math. 1977, **19** (1), 23–45. doi:10.1016/0012-365X(77)90117-0

[8] Tarakanov V.E. *Combinatorial problems on binary matrices.* Combinatorial analysis 1980, **5**, 4–15. (in Russian)

[9] Zatorsky R. Calculus of triangular matrices and its application. Simyk, Ivano-Frankivsk, 2010. (in Ukrainian)

Поступило 13.05.2013

Zatorsky R., Pylypiv V., Gulka S. *On some related enumeration problems.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 242–248.

The article is devoted to enumeration of partitioning of some classes of multisets, n-vertex regular graphs of the second degree and bitransversals of n-th order.

Key words and phrases: matrix, bitransversal, spanning 2-graph, regular graph, multiset.

Заторський Р., Пилипів В., Гулька С. *Про деякі зв'язані між собою перелікові задачі* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 242–248.

Робота присвячена переліченню розбиттів деяких класів мультимножин, n-вершинних регулярних графів другого степеня та бітрансверсалей n-го порядку.

Ключові слова і фрази: матриця, бітрансверсаль, остовний 2-граф, регулярний граф, мультимножина.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації. Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.95+511.42

Ільків В.С.[1,2], Савка І.Я.[2], Симотюк М.М.[2]

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ У ПРОСТОРІ СОБОЛЄВА ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, КОЕФІЦІЄНТИ ЯКОГО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

Ільків В.С., Савка І.Я., Симотюк М.М. *Періодичні розв'язки у просторі Соболєва для рівняння із частинними похідними, коефіцієнти якого залежать від параметра* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 249–255.

Встановлено умови існування та єдиності періодичного розв'язку у просторі Соболєва для лінійного рівняння із частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами, що залежать від одного дійсного параметра. Показано, що ці умови виконуються для майже всіх за мірою Лебега значень параметра.

Ключові слова і фрази: диференціальне рівняння, періодичний розв'язок, малий знаменник, діофантове наближення, метрична оцінка.

[1] Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

E-mail: ilkivv@i.ua (Ільків В.С.), s-i@ukr.net (Савка І.Я.), quaternion@ukr.net (Симотюк М.М.)

Вступ

Діофантові умови розв'язності часто зустрічаються в теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях (зокрема, на торі) через так звану проблему малих знаменників (див. [7, 17, 19]). З математичної точки зору ця проблема проявляється в тому, що у розв'язки задач, які зображаються у вигляді рядів Фур'є, входить безліч членів з коефіцієнтами, знаменники яких можуть бути як завгодно близькими до нуля, що зумовлює розбіжність цих рядів. Для подолання проблеми малих знаменників ефективним виявився метричний підхід [2, 4, 9, 10], який полягає у вивченні міри множин параметрів задачі (коефіцієнтів рівняння, коефіцієнтів крайових (зокрема, нелокальних) умов чи параметрів області), для яких діофантові властивості (діофантові нерівності) виконуються, або не виконуються безліч разів.

В останні роки багато робіт присвячено вивченню глобальної гіпоеліптичності і розв'язності лінійних диференціальних операторів на компактних многовидах, наприклад, на торі (див. [1, 5, 6, 8, 13, 14] і посилання в них), де також виникає проблема малих знаменників, які є поліномами $L(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, зі сталими коефіцієнтами. Зокрема, у роботі [8] показано, що диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами глобально гіпоеліптичний тоді і тільки тоді, коли його повний символ задовольняє діофантові умови типу Зігеля. Однак, у більшості з цих робіт сформульовано твердження, в яких присутні аксіоматичні умови вигляду $|L(k)| \geq c|k|^{-\delta}$ на малі знаменники.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 11K60.

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 54.1/027)

В роботах [3, 11] при відшуканні періодичних розв'язків для рівняння Шредінгера на двовимірному торі та для хвильового рівняння на $(n+1)$-вимірному торі у всій повноті застосовано методи теорії чисел (діофантових наближень) для встановлення оцінок знизу малих знаменників, які мали вигляд квадратичних форм. Періодичні задачі із застосуванням метричного підходу також вивчались у роботах [12, 15, 16, 18].

1 Основні позначення. Постановка задачі

Нехай $\Omega^p_{2\pi} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — тор, $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega^p_{2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $(k, x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$, D — вектор диференціювань з компонентами $D_1, \dots, D_p$, де $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $i = \sqrt{-1}$.

Через $D^s u$ позначимо мішану похідну $D_1^{s_1} \dots D_p^{s_p} u$, а через k^s — добуток $k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}$, де $s = (s_1, \dots, s_p)$ — набір цілих невід'ємних чисел, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$.

Нехай $\mathbf{C}^m(I;\mathbb{R})$ — простір дійснозначних m разів неперервно диференційовних на відрізку I функцій, а $\mathbf{C}^m(I;\mathbb{C})$ — простір комплекснозначних функцій, де $m \geq 0$. Нехай $W[f_1, \dots, f_m]$ позначає вронскіан функцій $f_1, \dots, f_m$ з простору $\mathbf{C}^m(I;\mathbb{R})$.

Запровадимо шкалу гільбертових просторів $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ для $q \in \mathbb{R}$, де соболєвський простір $\mathbf{H}_q$ отримано поповненням множини $v(x) = \sum_k v_k \exp(ik, x)$ за нормою $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_q}$, що породжена скалярним добутком $(v, u)_{\mathbf{H}_q} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} v_k \bar{u}_k$, в якому $\widetilde{k} = \sqrt{1 + (k,k)}$.

Позначимо через meas A міру Лебега вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$, а через M — відрізок кривої у просторі $\mathbb{C}^p$, який утворюють точки $b(\tau) = (b_1(\tau), \dots, b_p(\tau))$, якщо $\tau \in I$.

В області $\Omega^p_{2\pi}$ розглянемо задачу про відшукання 2π-періодичного (за всіма змінними) розв'язку $u = u(x)$ для лінійного рівняння із частинними похідними

$$L_\tau(D)u(x) \equiv \sum_{|s| \leq n} a_s D^s u(x) + \sum_{j=1}^{p} b_j(\tau) D_j^{n_j} u(x) = f(x), \quad x \in \Omega^p_{2\pi}, \tag{1}$$

та сталими комлексними коефіцієнтами a_s та b_j, де $f = f(x)$ — задана 2π-періодична функція, порядки $n_1, \dots, n_p$ похідних не перевищують n, а коефіцієнти $b_1, \dots, b_p$ є комплексними функціями $b_1(\tau), \dots, b_p(\tau)$ параметра τ на відрізку I дійсної прямої.

Основна мета роботи — встановлення умов єдиності та умов існування розв'язків рівнянь (1) у просторі Соболєва $\mathbf{H}_q$ у термінах діофантових властивостей функцій $b_j(\tau)$. При цьому використано метричний підхід і доведено теорему про коректну розв'язність задачі для майже всіх значень параметра $\tau \in I$.

2 Єдиність розв'язку

Розв'язок $u = u(x)$ задачі шукаємо у просторі 2π-періодичних функцій $\mathbf{H}_q$, тому він є таким рядом Фур'є:

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k e^{i(k,x)}. \tag{2}$$

Для визначення коефіцієнтів u_k одержуємо низку алгебричних рівнянь

$$L_\tau(k)u_k = f_k, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{3}$$

де f_k — коефіцієнти Фур'є функції $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} f_k e^{i(k,x)}$.

Введемо для $\tau \in I$ множину $\mathbb{Z}^p_0 = \mathbb{Z}^p_0(\tau)$ нулів функції $L_\tau(k)$ за формулою

$$\mathbb{Z}^p_0(\tau) = \{k \in \mathbb{Z}^p \colon L_\tau(k) = 0\}.$$

Для фіксованого τ кожне із рівнянь (3) має єдиний розв'язок $u_k = f_k / L_\tau(k)$, якщо $\mathbb{Z}^p_0 = \mathbb{Z}^p_0(\tau) = \varnothing$.

Якщо ж $\mathbb{Z}^p_0 \neq \varnothing$ для фіксованого числа τ, то для цього τ розв'язок рівняння (3) існує для тих і тільки тих функцій f, для яких $f_k = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p_0$. Тепер розв'язками рівняння (3) є довільні сталі $u_k = u_{k,0}$ для $k \in \mathbb{Z}^p_0$ і числа $u_k = f_k / L_\tau(k)$ для $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \mathbb{Z}^p_0$.

З цих тверджень сформулюємо дві теореми про єдиність розв'язку задачі.

Теорема 1. *Для єдиності (за фіксованого параметра $\tau \in I$) розв'язку рівняння (1) у просторі $\mathbf{H}_q$, де $q \in \mathbb{R}$, необхідно і достатньо, щоб алгебричне рівняння $L_\tau(k) = 0$ не мало розв'язків у цілих числах $k_1, \dots, k_p$, тобто $\mathbb{Z}^p_0 = \varnothing$.*

Теорема 2. *Якщо $f_k = 0$ для $k \in \mathbb{Z}^p_0$, то два розв'язки рівняння (1) у просторі $\mathbf{H}_q$ можуть відрізнятися один від одного сумою $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p_0} u_{k,0} e^{i(k,x)}$, де $u_{k,0}$ — комплексні сталі, які задовольняють нерівність $\Big\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^p_0} u_{k,0} e^{i(k,x)} \Big\|_{\mathbf{H}_q} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p_0} \widetilde{k}^{2q} |u_{k,0}|^2 < \infty$.*

Зауваження 1. *Якщо шуканий розв'язок підпорядкувати умові $(u, e^{i(k,\cdot)})_{\mathbf{H}_q} = 0$ для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p_0$, то в умовах теореми 2 рівняння (1) не може мати двох різних розв'язків із простору $\mathbf{H}_q$.*

Розв'язок задачі існує, якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ рівняння (3) є розв'язним, а ряд (2) — розв'язок рівняння (1) — належить до простору $\mathbf{H}_q$.

Припустимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p_0$ виконується умова $f_k = 0$. Тоді загальний розв'язок $u(x)$ задачі формально можна зобразити рядом

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p_0} u_{k,0} e^{i(k,x)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \mathbb{Z}^p_0} \frac{f_k}{L_\tau(k)} e^{i(k,x)}, \tag{4}$$

де $u_{k,0}$ — довільні комплексні сталі.

3 Метричні оцінки

Символ $L_\tau(k)$ оператора $L_\tau(D)$ впливає на збіжність ряду (4), який визначає норму розв'язку рівняння (1) у $\mathbf{H}_q$, оскільки може як завгодно швидко наближатися до нуля для множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, існування 2π-періодичного розв'язку u задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Для вирішення цієї проблеми скористаємося метричним підходом для оцінок знизу малих знаменників $L_\tau(k)$, де $k \in \mathbb{Z}^p$, послідовністю зі степеневою поведінкою і властивістю δ-нормальності множини. Реалізація цього підходу вимагає встановлення оцінок зверху для мір виняткових множин гладких функцій.

Для довільного $\delta \in \mathbb{R}$ введемо поняття δ-нормальності кривої M, що визначається коефіцієнтами $b_1, \dots, b_p$ рівняння (1).

Означення. *Крива* M *називається* δ*-нормальною щодо рівняння* (1), *якщо існує така стала* $C_0 > 0$, *що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$*) точок* $\tau \in I$ *нерівність*

$$|L_\tau(k)| \geq C_0 \tilde{k}^{-\delta} \tag{5}$$

виконується для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \mathbb{Z}_1^p$, *де* $\mathbb{Z}_1^p = \mathbb{Z}_1^p(\tau)$ — *скінченна множина.*

Із властивості δ-нормальності кривої випливає *фредгольмовість* розглядуваної задачі для майже всіх точок відрізка I.

Сформулюємо і доведемо теорему про умови δ-нормальності кривої M.

Теорема 3. *Якщо функції* $b_1, \ldots, b_p$ *належать до простору* $\mathbf{C}^{p+1}(I;\mathbb{C})$ *і виконується хоча б одна з двох умов:*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \min_{\tau\in I} \left|W\left[\operatorname{Re} b_1, \ldots, \operatorname{Re} b_p, 1\right](\tau)\right| \neq 0, \\ &\text{(ii)} \quad \min_{\tau\in I} \left|W\left[\operatorname{Im} b_1, \ldots, \operatorname{Im} b_p, 1\right](\tau)\right| \neq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

то при $\delta > p^2 - n_0$ *крива* M *є* δ*-нормальною, де* $n_0 = \min\{n_1, \ldots, n_p\}$.

Доведення. Припустимо, що виконується умова (i) теореми. Введемо множини

$$B_k = \{\tau \in I : |\operatorname{Re} L_\tau(k)| < \varepsilon_k\}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p,$$

і множину B тих точок $\tau \in I$, для яких безліч разів на $\mathbb{Z}^p$ справджується оцінка

$$|\operatorname{Re} L_\tau(k)| < \varepsilon_k = \frac{C_1}{2(p+1)^{n_0/2}} \tilde{k}^{-\delta}.$$

Для оцінювання міри множин B_k сформулюємо відповідну терему із роботи [20].

Теорема 4. *Нехай* $F(\tau, z) = f_1(\tau) z_1 + \ldots + f_m(\tau) z_m$, *де* $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, *а також* $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset C^m(I;\mathbb{R})$. *Якщо вронскіан* $W[f_1, \ldots, f_m]$ *функцій* $f_1, \ldots, f_m$ *відмінний від нуля на* I, *то для всіх* $z \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ *і довільного* $\varepsilon \in (0, C_1|z|/2)$ *виконується оцінка*

$$\operatorname{meas}\{\tau \in I : |F(\tau, z)| < \varepsilon\} \leq C_2 \sqrt[m-1]{\varepsilon/|z|},$$

де $|z| = |z_1| + \ldots + |z_m|$, *додатні сталі* C_1 *і* C_2 *визначають формули*

$$C_1 = \frac{1}{m} \min_{\tau\in I} |W[f_1, \ldots, f_m](\tau)| \Big(\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{C^{(m-1)}(I;\mathbb{R})} \sum_{j=1}^m \|f_j\|^{-1}_{C^{(m-1)}(I;\mathbb{R})} \Big)^{-1},$$

$$C_2 = 4(\sqrt{2}+1)(m-1) C_1^{m/(1-m)} \big(\operatorname{meas} I \max_{1\leq j,q\leq m} \|f_j^{(q)}\|_{C(I;\mathbb{R})} + C_1\big).$$

Позначимо $m = p+1$, $g_k = \operatorname{Re} \sum_{|s|\leq n} a_s k^s$ і запишемо вираз $\operatorname{Re} L_\tau(k)$ у вигляді суми

$$\operatorname{Re} L_\tau(k) = \operatorname{Re} b_1(\tau) k_1^{n_1} + \ldots + \operatorname{Re} b_p(\tau) k_p^{n_p} + g_k.$$

Якщо $z = (k_1^{n_1}, \ldots, k_p^{n_p}, g_k)$, $f_j(\tau) = \operatorname{Re} b_j(\tau)$ для $j = 1, \ldots, p$ і $f_{p+1}(\tau) = 1$, то з позначень теореми 4 випливають рівності

$$F(\tau, z) = \operatorname{Re} L_\tau(k), \qquad W[f_1, \ldots, f_m] = W[\operatorname{Re} b_1, \ldots, \operatorname{Re} b_p, 1].$$

Оскільки $|z| \geq 1$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ і виконуються нерівності

$$0 < \varepsilon_k < \frac{C_1}{2(p+1)^{n_0/2}} \tilde{k}^{n_0} < \frac{C_1}{2}|z| = \frac{C_1}{2}\left(|k_1|^{n_1} + \ldots + |k_p|^{n_p} + |g_k|\right),$$

то при кожному $k \neq 0$ за умовою (6) з теореми 4 маємо такі оцінки для міри B_k:

$$\operatorname{meas} B_k \leq C_2 \sqrt[m-1]{\varepsilon_k/|z|} = C_2 \sqrt[p]{\varepsilon_k/|z|} \leq C_3 \tilde{k}^{-(\delta+n_0)/p}, \qquad C_3 = C_2\left(\tfrac{C_1}{2}\right)^{1/p}.$$

Для вибраних δ ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \operatorname{meas} B_k$ мажорується збіжним рядом $C_3 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{-(\delta+n_0)/p}$, тому з леми Бореля-Кантеллі випливає, що міра Лебеґа множини точок τ із I, що потрапляють у нескінченну кількість множин B_k, дорівнює нулю, тобто $\operatorname{meas} B = 0$.

Тоді при $\delta > p^2 - n_0$ для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) чисел $\tau \in I$ нерівність $|\operatorname{Re} L(\tau, k)| \geq \varepsilon_k$ виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів k. Із означення δ-нормальності та нерівностей

$$|L_\tau(k)| \geq |\operatorname{Re} L_\tau(k)| \geq \frac{C_1}{2(p+1)^{n_0/2}} \tilde{k}^{-\delta} = C_0 \tilde{k}^{-\delta}$$

випливає, що крива M є δ-нормальною зі сталими $\delta > p^2 - n_0$ і $C_0 = C_1/2(p+1)^{n_0/2}$.

Якщо виконується умова (ii) теореми, то візьмемо $f_j(\tau) = \operatorname{Im} b_j(\tau)$ для $j = 1, \ldots, p$. Далі результат отримуємо аналогічно. Теорему доведено. □

4 Існування розв'язку

Твердження доведеної теореми 3 використовуємо для встановлення такої теореми існування розв'язку розглядуваної задачі.

Теорема 5. *Нехай* $\delta > p^2 - n_0$ *і коефіцієнти* $b_1, \ldots, b_p$ *рівняння* (1) *задовольняють умови теореми* 3. *Тоді для кожної функції* $f \in \mathbf{H}_{q+\delta}$, *яка задовольняє умову ортогональності* $f_k = 0$, *якщо* $k \in \mathbb{Z}_0^p$, *для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$*) чисел* $\tau \in I$ *існує* 2π*-періодичний розв'язок* u *рівняння* (1) *із простору* $\mathbf{H}_q$, *який можна зобразити у вигляді ряду* (4).

Доведення. За умовами теореми крива M є δ-нормальною внаслідок теореми 3. Це означає, що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) точок $\tau \in I$ є істинним твердження

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \mathbb{Z}_0^p) \qquad |L_\tau(k)| \geq C_4 \tilde{k}^{-\delta}, \tag{7}$$

де $C_4 = C_4(\tau) = \min\{C_0, \min_{k\in\mathbb{Z}_1^p\setminus\mathbb{Z}_0^p} |\tilde{k}^\delta L_\tau(k)|\}$, $\mathbb{Z}_1^p = \mathbb{Z}_1^p(\tau)$ — скінченна множина елементів $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких не виконується нерівність (5), тому $\mathbb{Z}_0^p \subset \mathbb{Z}_1^p$. Із формули для норми в просторі $\mathbf{H}_q$ отримуємо таку оцінку квадрата норми розв'язку (4):

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q} |u_k|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}_1^p} \tilde{k}^{2q} |u_{k,0}|^2 + C_4^{-2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\mathbb{Z}_1^p} \tilde{k}^{2(q+\delta)} |f_k|^2 \leq S + C_5 \|f\|^2_{\mathbf{H}_{q+\delta}},$$

де $C_5 = C_4^{-2}$, а величина $S = \sum_{k\in\mathbb{Z}_1^p} \tilde{k}^{2q} |u_{k,0}|^2$ є скінченною сумою, тому $S < \infty$ для довільних чисел $u_{k,0} \in \mathbb{C}$. Отже, $\|u\|_{\mathbf{H}_q} < \infty$, тобто $u \in \mathbf{H}_q$. Теорему доведено. □

Зауваження 2. *Якщо в умовах теореми 5 для якогось τ множина $Z_0^p(\tau)$ є порожньою, то розв'язок (4) періодичної задачі для рівняння (1) існує для кожної функції $f \in \mathbf{H}_{q+\sigma}$ та єдиний.*

Зауваження 3. *Гладкість правої частини f рівняння (1) в умовах розв'язності зростає разом із розмірністю p тора $\Omega_{2\pi}^p$ і спадає зі зростанням мінімального з чисел $n_1, \dots, n_p$.*

З останньої теореми випливає фредгольмовість розглядуваної задачі для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) точок $\tau \in I$, оскільки для цих τ задача має скінченновимірне ядро у просторі $\mathbf{H}_q$ і кількість умов ортогональності ($f_k = 0$) дорівнює розмірності ядра.

Висновки

У роботі встановлено умови єдиності та умови існування 2π-періодичного розв'язку у просторі Соболєва для лінійного безтипного диференціального рівняння (1), комплексні коефіцієнти $b_1, \dots, b_p$ якого при фіксованих незмішаних похідних (порядків $n_1, \dots, n_p$ відповідно) залежать від дійсного параметра τ.

Умовами (6) для $\delta > p^2 - n_0$ визначено клас δ-нормальних кривих

$$\mathrm{M} = \{(b_1(\tau), \dots, b_p(\tau)),\ \tau \in I\},$$

для якого має місце розв'язність розглядуваної задачі у просторі Соболєва для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) точок τ із відрізка I.

Отримані результати можна поширити на випадок відшукання періодичних розв'язків за змінними $x_1, \dots, x_p$ з вектором періодів $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ для рівняння $L_\tau(D)u(x) = 0$, де $x \in \Omega_\omega^p$, Ω_ω^p — відповідний тор.

References

[1] Albanese A.A. *On the global C^∞ and Gevrey hypoellipticity on the torus of some classes of degenerate elliptic operators.* Note di Matematica 2011, **31** (1), 1–13. doi:10.1285/i15900932v31n1p1

[2] Arnol'd V.I. *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics.* Uspehi Mat. Nauk 1963, **18** (6), 91–192. doi:10.1070/RM1963v018n06ABEH001143 (in Russian)

[3] Beresnevich V., Dodson M., Kristensen S., Levesley J. *An inhomogeneous wave equation and non-linear Diophantine approximation.* Advances in Mathematics 2008, **217** (2), 740–760. doi:10.1016/j.aim.2007.09.003

[4] Bourghin D. G., Duffin R. J. *The Dirichlet problem for the vibrating string equation.* Bull. Amer. Math. Soc. 1939, **45** (12), 851–858. doi:10.1090/S0002-9904-1939-07103-6

[5] Dickinson H., Gramchev T., Yoshino M. *Perturbations of vector fields on tori: resonant normal forms and Diophantine phenomena.* Proc. Edinb. Math. Soc. 2002, **45** (3), 731–759. doi:10.1017/S001309150000064X

[6] Gramchev T., Yoshino M. *WKB analysis to global solvability and hypoellipticity.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1995, **31** (3), 443–464. doi:10.2977/prims/1195164049

[7] Grebennikov E.A, Ryabov Yu.A. Resonances and small denominators in celestial mechanics. Nauka, Moscow, 1978. (in Russian)

[8] Greenfield S., Wallach N. *Global hypoellipticity and Liouville numbers.* Proc. Amer. Math. Soc. 1972, **31** (1), 112–114. doi:10.2307/2038523

[9] Il'kiv V.S., Ptashnyk B.Yo. *Problems for partial differential equations with nonlocal conditions. Metric approach to the problem of small denominators.* Ukrainian Math. J. 2006, 58 (12), 1847–1875. doi:10.1007/s11253-006-0172-8 (in Ukrainian)

[10] Kolmogorov A.N. *On dynamical systems with an integral invariant on the torus.* Doklady Akad. Nauk SSSR 1953, **93** (5), 763–766. (in Russian)

[11] Kristensen S. *Diophantine approximation and the solubility of the Schrödinger equation.* Phys. Lett. A. 2003, **314** (1), 15–18. doi: 10.1016/S0375-9601(03)00867-3

[12] Novák B. *Remark on periodic solutions of a linear wave equation in one dimension.* Comm. Math. Uni. Carolinae 1974, **15**, 513–519.

[13] Petronilho G. *Global hypoellipticity, global solvability and normal form for a class of real vector fields on a torus and application.* Trans. Amer. Math. Soc. 2011, **363**, 6337–6349. doi:10.1090/S0002-9947-2011-05359-6

[14] Petronilho G. *Global solvability and simultaneously approximable vectors.* J. Differential Equations 2002, **184** (1), 48–61. doi:10.1006/jdeq.2001.4132

[15] Polishchuk V.M., Ptashnyk B.Yo. *Periodic boundary value problem for linear hyperbolic equations.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1975, **5**, 158–160. (in Russian)

[16] Polishchuk V.M., Ptashnyk B.Yo. *Periodic solutions of a system of partial differential equations with constant coefficients.* Ukrainian Math. J. 1980, **32** (2), 239–243. doi: 10.1007/BF01092793 (in Russian)

[17] Ptashnyk B.Yo., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 2002. (in Ukrainian)

[18] Ptashnyk B.Yo. *Periodic boundary value problem for linear hyperbolic equations with constant coefficients.* In: Math. Physics, 12, 117–121. Naukova Dumka, Kiev, 1972. (in Russian)

[19] Ptashnyk B.Yo. Ill-Posed Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 1984. (in Russian)

[20] Savka I.Ya. *Nonlocal problem with dependent coefficients in conditions for the second-order equation in time variable.* Carpathian Math. Publ. 2010, **2** (2), 101–110. (in Ukrainian)

Надійшло 27.12.2012

I'lkiv V.S., Savka I.Ya., Symotyuk M.M. *Sobolev periodic solutions of a partial differential equation with coefficients which depend on a parameter.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 249–255.

The conditions of existence and uniqueness of Sobolev periodic solution for linear partial differential equation with constant complex coefficients, which depends on one real parameter, are established. It is shown that these conditions fulfill for almost all (with respect to the Lebesgue measure) parameter values.

Key words and phrases: differential equation, periodic solution, small denominator, diophantine approximation, metric estimation.

Ильків В.С., Савка И.Я., Сымотюк М.М. *Периодические решения в пространстве Соболева для уравнения с частными производными, коэффициенты которого зависят от параметра* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 249–255.

Установлены условия существования и единственности периодического решения в пространстве Соболева для линейного уравнения с частными производными с постоянными комплексными коэффициентами, которые зависят от одного действительного параметра. Показано, что эти условия выполняются для почти всех по мере Лебега значений параметра.

Ключевые слова и фразы: дифференциальное уровнение, периодическое решение, малый знаменатель, диофантовое приближение, метрическая оценка.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.98

KACHANOVSKY N.A.

ON EXTENDED STOCHASTIC INTEGRALS WITH RESPECT TO LÉVY PROCESSES

Kachanovsky N.A. *On extended stochastic integrals with respect to Lévy processes.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 256–278.

Let L be a Lévy process on $[0, +\infty)$. In particular cases, when L is a Wiener or Poisson process, any square integrable random variable can be decomposed in a series of repeated stochastic integrals from nonrandom functions with respect to L. This property of L, known as the chaotic representation property (CRP), plays a very important role in the stochastic analysis. Unfortunately, for a general Lévy process the CRP does not hold.

There are different generalizations of the CRP for Lévy processes. In particular, under the Itô's approach one decomposes a Lévy process L in the sum of a Gaussian process and a stochastic integral with respect to a Poisson random measure, and then uses the CRP for both terms in order to obtain a generalized CRP for L. The Nualart–Schoutens's approach consists in decomposition of a square integrable random variable in a series of repeated stochastic integrals from nonrandom functions with respect to so-called orthogonalized centered power jump processes, these processes are constructed with using of a cádlág version of L. The Lytvynov's approach is based on orthogonalization of continuous polynomials in the space of square integrable random variables.

In this paper we construct the extended stochastic integral with respect to a Lévy process and the Hida stochastic derivative in terms of the Lytvynov's generalization of the CRP; establish some properties of these operators; and, what is most important, show that the extended stochastic integrals, constructed with use of the above-mentioned generalizations of the CRP, coincide.

Key words and phrases: Lévy process, chaotic representation property, extended stochastic integral, Hida stochastic derivative.

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: nick2@zeos.net

INTRODUCTION

Let $L = (L_t)_{t\in[0,+\infty)}$ be a Lévy process, i.e., a random process on $[0, +\infty)$ with stationary independent increments and such that $L_0 = 0$ (see, e.g., [6, 26, 28] for detailed information about Lévy processes). In particular cases, when L is a Wiener or Poisson process, any square integrable random variable can be decomposed in a series of repeated stochastic integrals from nonrandom functions with respect to L. This property of L is called the *chaotic representation property* (CRP), see, e.g., [23] for more information. The CRP plays a very important role in the stochastic analysis (in particular, it can be used in order to construct extended stochastic integrals, see, e.g., [16, 33, 15]), but, unfortunately, for a general Lévy process this property does not hold (e.g., [31]).

There are different generalizations of the CRP for Lévy processes. The first one was proposed by K. Itô [14] (see also [7]) and consists in the following. By the Lévy–Khintchine formula

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60H05, 60G51, 47A05.

a Lévy process L can be decomposed in the sum of a Gaussian process and a stochastic integral with respect to a Poisson random measure, then one uses chaotic decompositions for both terms in order to obtain a generalized CRP for L.

Another generalization was proposed by D. Nualart and W. Schoutens [24] (see also [29]), now one decomposes a square integrable random variable in a series of repeated stochastic integrals from nonrandom functions with respect to so-called orthogonalized centered power jump processes, these processes are constructed with using of a cádlág version of the initial Lévy process.

One more generalization (for a Lévy process without Gaussian part) was proposed by E.W. Lytvynov [22], his approach is based on orthogonalization of continuous monomials in the space of square integrable random variables.

The interconnection between above-mentioned generalizations of the CRP is described in, e.g., [22, 2, 30], one more example of a generalized CRP is given in [10, 9].

Let from now L be a Lévy process without Gaussian part and drift (it is comparatively simply to consider such processes from technical point of view). In order to construct an extended stochastic integral with respect to L, one can take any generalization of the CRP described above. Namely, in the case of the "Itô's CRP" the construction of this integral is analogous to the corresponding construction in the Poisson case, cf., e.g., [10] and [15]. In the case of the "Nualart–Schoutens's CRP" one can use term by term integration of a Nualart–Schoutens decomposition for an integrand with respect to a random measure corresponding to L. In the case of the "Lytvynov's CRP" one can construct the extended stochastic integral as in the Meixner case [17] (see also [18]): with use of a "special symmetrization" for kernels from the Lytvynov decomposition, or as the conjugated operator to the Hida stochastic derivative. The reader can find more information about extended stochastic integrals with respect to Lévy processes in, e.g., [3, 21, 10, 8, 11, 25, 9], for a general information about stochastic integration on infinite-dimensional spaces see, e.g., [1].

The main aims of the present paper are to construct the extended stochastic integral with respect to a Lévy process and the Hida stochastic derivative in terms of the Lytvynov's generalization of the CRP; to establish some properties of these operators; and, what is most important, to show that the extended stochastic integrals, constructed with use of three above-mentioned generalizations of the CRP, coincide.

The paper is organized in the following manner. In the first section we introduce a Lévy process L and construct a convenient for our considerations probability triplet connected with L; then we consider in details the above-mentioned generalizations of the CRP for L. In particular, we prove a statement about interconnection between the Itô's and Lytvynov's generalizations of the CRP for L. In the second section we introduce extended stochastic integrals in terms of the above-mentioned generalizations of the CRP and prove that these integrals coincide; then we introduce a Hida stochastic derivative in terms of the Lytvynov's generalization of the CRP and establish that this derivative and the extended stochastic integral are conjugated one to another operators.

1 LÉVY PROCESSES AND GENERALIZATIONS OF THE CHAOTIC REPRESENTATION PROPERTY

1.1 Lévy processes

Denote $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. In this paper we deal with a real-valued locally square integrable Lévy process $L = (L_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (a random process on $\mathbb{R}_+$ with stationary independent increments and such that $L_0 = 0$) without Gaussian part and drift. By the Lévy–Khintchine formula such a process can be presented in the form (e.g., [10])

$$L_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x\widetilde{N}(du, dx), \tag{1}$$

where $\widetilde{N}(du, dx, \cdot)$ is the compensated Poisson random measure of L; and the characteristic function of L is

$$\mathbb{E}[e^{iuL_t}] = \exp\left[t\int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)\nu(dx)\right], \tag{2}$$

where ν is the Lévy measure of L, which is a measure on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, here and below $\mathcal{B}$ denotes the Borel σ-algebra, $\mathbb{E}$ denotes the expectation. We assume that ν *is a Radon measure whose support contains an infinite number of points,* $\nu(\{0\}) = 0$, *there exists* $\varepsilon > 0$ *such that*

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\varepsilon|x|}\nu(dx) < \infty,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx) = 1. \tag{3}$$

Let us define a measure of the white noise of L. Let $\mathcal{D}$ denote the set of all real-valued infinite-differentiable functions on $\mathbb{R}_+$ with compact supports. As is well known, $\mathcal{D}$ can be endowed by the projective limit topology generated by some Sobolev spaces (see, e.g., [5]). Let $\mathcal{D}'$ be the set of linear continuous functionals on $\mathcal{D}$. For $\omega \in \mathcal{D}'$ and $\varphi \in \mathcal{D}$ denote $\omega(\varphi)$ by $\langle\omega, \varphi\rangle$; note that one can understand $\langle\cdot, \cdot\rangle$ as the dual pairing generated by the scalar product in the space $L^2(\mathbb{R}_+)$ of (classes of) square integrable with respect to the Lebesgue measure real-valued functions on $\mathbb{R}_+$. The notation $\langle\cdot, \cdot\rangle$ will be preserved for dual pairings in tensor powers of spaces.

A probability measure μ on $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'))$, where $\mathcal{C}$ denotes the cylindrical σ-algebra, with the Fourier transform

$$\int_{\mathcal{D}'} e^{i\langle\omega,\varphi\rangle}\mu(d\omega) = \exp\left[\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} (e^{i\varphi(u)x} - 1 - i\varphi(u)x)du\nu(dx)\right], \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{4}$$

is called the *Lévy white noise measure.*

The existence of μ from the Bochner–Minlos theorem (e.g., [13]) follows. Below we will reckon that the *σ-algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ is augmented with respect to μ*, i.e., $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ contains all subsets of all sets O such that $\mu(O) = 0$.

Denote $(L^2) := L^2(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$ the space of (classes of) real-valued square integrable with respect to μ functions on $\mathcal{D}'$; let also $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+)$. Substituting in (4) $\varphi = t\psi$, $t \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{D}$, and using the Taylor decomposition by t and (3), one can show that

$$\int_{\mathcal{D}'} \langle\omega, \psi\rangle^2\mu(d\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} (\psi(u))^2 du \tag{5}$$

(this statement follows also from results of [22] and [10]). Let $f \in \mathcal{H}$ and $\mathcal{D} \ni \varphi_k \to f$ in $\mathcal{H}$ as $k \to \infty$. It follows from (5) that $\{\langle\circ, \varphi_k\rangle\}_{k\geq1}$ is a Cauchy sequence in (L^2), therefore one can define $\langle\circ, f\rangle := \lim_{k\to\infty}\langle\circ, \varphi_k\rangle \in (L^2)$ (the limit in the topology of (L^2)). It is easy to show (by the method of "mixed sequences") that $\langle\circ, f\rangle$ does not depend on a choice of an approximating sequence for f and therefore is well-definite in (L^2).

Let us consider $\langle\circ, 1_{[0,t)}\rangle \in (L^2)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (here and below 1_A denotes the indicator of a set A). It follows from (2) and (4) that $\left(\langle\circ, 1_{[0,t)}\rangle\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ can be identified with a Lévy process on the probability space $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$, therefore from now we will identify L_t with $\langle\circ, 1_{[0,t)}\rangle$.

Remark. *In this paper we work in the framework of the so-called "L^2-theory of stochastic processes". In particular, it means that it is sufficient for us to understand L_t, $t \in \mathbb{R}_+$, as an element of (L^2) (i.e., as an equivalence class in (L^2)), and, correspondingly, L is a family of elements from (L^2). But in the probability theory often it is necessary to consider modifications of random processes with some special properties. For example, one can prove that there exists a cádlág modification of L (i.e., a random process, which is stochastically equivalent to L and has right continuous with finite left limits trajectories), and the random measure $\widetilde{N}$ from representation* (1) *can be constructed with using of such a modification (e.g., [26, 6, 28, 10]).*

1.2 Generalizations of the chaotic representation property for Lévy processes

Let $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ be a Poisson random process. Then, as is well known, any square integrable random variable F (square integrability means that $\mathbb{E}|F|^2 < \infty$) can be presented as a series of repeated (Itô) stochastic integrals from nonrandom functions with respect to N (see, e.g., [23] for details). This property of a Poisson process is known as the chaotic representation property (CRP) and plays a very important role in the stochastic analysis. In particular, it is simple to construct an extended (Skorohod) stochastic integral if we use the CRP ([15]).

Unfortunately, for a general L the CRP does not hold (e.g., [31]). Therefore there is a natural question: what can be an appropriate analog of the CRP? There are different answers on this question. The first one was given by K. Itô [14] (see also [7]) and consists in the following. Denote by $\widehat{\otimes}$ a symmetric tensor product. For $n \in \mathbb{N}$ and $f_n \in L^2(\lambda \otimes \nu)^{\widehat{\otimes}n}$ (here $L^2(\lambda \otimes \nu)$ is the space of square integrable with respect to $\lambda \otimes \nu$ real-valued functions on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, λ is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+$) set

$$I_n(f_n) := \int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^n} f_n(u_1, x_1; \ldots; u_n, x_n)\widetilde{N}(du_1, dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n, dx_n), \tag{6}$$

where $\widetilde{N}$ as in (1), let also $I_0(f_0) := f_0$ for $f_0 \in \mathbb{R}$. Denote $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $L^2(\lambda \otimes \nu)^{\widehat{\otimes}0} := \mathbb{R}$.

Theorem. ([14]) *Let $F \in (L^2)$. Then there exists a unique sequence of kernels $f_n \in L^2(\lambda \otimes \nu)^{\widehat{\otimes}n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, such that*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \tag{7}$$

and

$$\mathbb{E}|F|^2 = \|F\|^2_{(L^2)} = \int_{\mathcal{D}'} |F(\omega)|^2\mu(d\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\|f_n\|^2_{L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}}. \tag{8}$$

Moreover, for $f_n \in L^2(\lambda \otimes \nu)^{\widehat{\otimes}n}$ and $g_m \in L^2(\lambda \otimes \nu)^{\widehat{\otimes}m}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathbb{E}\left[I_n(f_n)I_m(g_m)\right] = \delta_{n,m}n!(f_n, g_n)_{L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}}. \tag{9}$$

Another approach to a generalization of the CRP was proposed by E.W. Lytvynov [22]. This approach is based on the orthogonalization of continuous polynomials in (L^2) (a suitable procedure of orthogonalization is described in [32]). Note that in the case when a Lévy process is a Poisson one, the repeated stochastic integrals from the chaotic decomposition of an element from (L^2) can be identified with so-called generalized Charlier polynomials that are orthogonal in (L^2). Let $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\mathcal{D}')$ be the set of continuous polynomials on $\mathcal{D}'$, i.e., elements of $\mathcal{P}$ have a form

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{N_F} \langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle, \quad \omega \in \mathcal{D}',\ N_F \in \mathbb{Z}_+,\ f^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n},\ f^{(N_F)} \neq 0,$$

here N_F is called the *power of a polynomial* F, $\langle \omega^{\otimes 0}, f^{(0)} \rangle := f^{(0)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} 0} := \mathbb{R}$. Since the Lévy white noise measure μ has a holomorphic at zero Laplace transform (this follows from (4) and properties of the measure ν, see also [22]), $\mathcal{P}$ is a dense set in (L^2) ([32]). Denote by $\mathcal{P}_n$ the set of continuous polynomials of power $\leq n$, by $\overline{\mathcal{P}}_n$ the closure of $\mathcal{P}_n$ in (L^2). Let for $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}_n := \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1}$ (the orthogonal difference in (L^2)), $\mathbf{P}_0 := \overline{\mathcal{P}}_0$. It is clear that

$$(L^2) = \mathop{\oplus}_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n.$$

Let $f^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Denote by $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:$ the orthogonal projection of a monomial $\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle$ onto $\mathbf{P}_n$. Let us define scalar products $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ext}$ on $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, by setting for $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}$

$$\langle f^{(n)}, g^{(n)} \rangle_{ext} := \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{D}'} :\langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :: \langle \omega^{\otimes n}, g^{(n)} \rangle : \mu(d\omega), \tag{10}$$

and let $|\cdot|_{ext}$ be the corresponding norms, i.e., $|f^{(n)}|_{ext} = \sqrt{\langle f^{(n)}, f^{(n)} \rangle_{ext}}$. Denote by $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, the completion of $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}$ with respect to the norm $|\cdot|_{ext}$. For $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ define $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle: = (L^2) - \lim_{k\to\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, f_k^{(n)} \rangle:$, where $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n} \ni f_k^{(n)} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} f^{(n)}$ in $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ (one can easily verify the correctness of this definition). Since, as is easy to see, the sets $\{:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:, f^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}\}$ are dense in $\mathbf{P}_n$, the following statement is fulfilled.

Theorem. *Let $F \in (L^2)$. Then there exists a unique sequence of kernels $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, such that*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle: \tag{11}$$

and

$$\mathbb{E}|F|^2 = \|F\|_{(L^2)}^2 = \int_{\mathcal{D}'} |F(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f^{(n)}|_{ext}^2. \tag{12}$$

Moreover, for $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ and $g^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big[:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :: \langle \circ^{\otimes m}, g^{(m)} \rangle :\big] \\ &= \int_{\mathcal{D}'} :\langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :: \langle \omega^{\otimes m}, g^{(m)} \rangle : \mu(d\omega) = \delta_{n,m} n! \langle f^{(n)}, g^{(n)} \rangle_{ext}. \end{aligned} \tag{13}$$

Remark. *It was shown in [22] that in the space (L^2) $:\langle \circ^{\otimes 0}, f^{(0)} \rangle: = \langle \circ^{\otimes 0}, f^{(0)} \rangle = f^{(0)}$ and $:\langle \circ, f^{(1)} \rangle: = \langle \circ, f^{(1)} \rangle$. But for $n > 1$ $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:$ is not a continuous polynomial, generally speaking. Moreover, in this case the elements $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:$ are continuous polynomials (and even generalized Appell polynomials, or Schefer polynomials in another terminology) if and only if our Lévy process L belongs to the so-called Meixner class of random processes, see [22] for details.*

Remark. *Let $\mathcal{F}_{ext} := \mathop{\oplus}_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{ext}^{(n)} n!$ be the weighted orthogonal sum of the spaces $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. The space $\mathcal{F}_{ext}$ is called an extended Fock space. This space has important applications in the "Lévy analysis", see, e.g., [22, 4]. The foregoing theorem states that there exists an isometrical isomorphism between $\mathcal{F}_{ext}$ and (L^2), this isomorphism is described by* (11).

One more generalization of the CRP is proposed by D. Nualart and W. Schoutens [24] (see also [29]). Now one decomposes $F \in (L^2)$ in a series of repeated stochastic integrals from nonrandom functions with respect to special random processes generated by a cádlág version of L. Here we describe a modification of this approach offered by E.W. Lytvynov [22]. Let

$$p_n(x) := x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x, \quad a_{n,j} \in \mathbb{R},\ j \in \{1, \ldots, n-1\},\ n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

be orthogonal in $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ polynomials, i.e., for $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, $\int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) \nu(dx) = 0$. For $n \in \mathbb{N}$ we define random measures $Y^{(n)}(\Delta)$ on $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ by setting

$$Y^{(n)}(\Delta) := \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} 1_\Delta(u) p_n(x) \widetilde{N}(du, dx) = I_1(1_\Delta p_n). \tag{15}$$

Note that the random processes $Y_t^{(n)}$ ($Y_t^{(1)} = L_t$) from [24] are connected with the measures $Y^{(n)}(\Delta)$ as follows: $Y_t^{(n)} = Y^{(n)}([0, t])$.

Proposition. ([22]) *For each $n \in \mathbb{N}$ and $f^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}$ we have*

$$\begin{aligned} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle: = &\sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\ldots,k,\ l_1 > l_2 > \cdots > l_k, \\ l_1 s_1 + \cdots + l_k s_k = n}} \frac{n!}{s_1! \cdots s_k! (l_1!)^{s_1} \cdots (l_k!)^{s_k}} \\ &\times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} f^{(n)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1}, \ldots, u_{s_1}}_{l_1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}) \\ &\times Y^{(l_1)}(du_1) \cdots Y^{(l_1)}(du_{s_1}) \cdots Y^{(l_k)}(du_{s_1+\cdots+s_k}). \end{aligned} \tag{16}$$

One can show that formulas (16) hold true for $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, therefore substituting (16) in (11) one obtains a variant of the Nualart–Schoutens decomposition for $F \in (L^2)$. Moreover, substituting (16) in (10) one can obtain the explicit formulas for the scalar products in $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. Namely, for $f_n \in L^2(\lambda \otimes \nu)^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$, denote by $[f_n]_{sym}$ the orthogonal projection of f_n onto $L^2(\lambda \otimes \nu)^{\widehat{\otimes} n}$ (i.e., roughly speaking, the symmetrization of $f_n(\cdot_1, \bullet_1; \ldots; \cdot_n, \bullet_n)$ by pairs of arguments $(\cdot_1, \bullet_1), (\cdot_2, \bullet_2)$ etc.). Further, denote by $\|\cdot\|_\nu$ the norm in $L^2(\mathbb{R},\nu)$. Since (see (15))

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} f^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})Y^{(l_1)}(du_1)\cdots Y^{(l_k)}(du_{s_1+\dots+s_k})\\
&= \int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^{s_1+\dots+s_k}} f^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})p_{l_1}(x_1)\cdots p_{l_k}(x_{s_1+\dots+s_k})\\
&\qquad\times\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_{s_1+\dots+s_k},dx_{s_1+\dots+s_k})\\
&= I_{s_1+\dots+s_k}\big([f^{(n)}(\underbrace{\cdot_1,\dots,\cdot_1}_{l_1},\dots,\underbrace{\cdot_{s_1+\dots+s_k},\dots,\cdot_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})p_{l_1}(\bullet_1)\cdots p_{l_k}(\bullet_{s_1+\dots+s_k})]_{sym}\big),
\end{aligned} \tag{17}$$

the next statement from (9) follows.

Proposition. ([22]) *For $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes}n}$, $n \in \mathbb{N}$, we have*

$$\begin{aligned}
\langle f^{(n)}, g^{(n)}\rangle_{ext} &= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>l_2>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\\
&\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} f^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1},\dots,u_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})\\
&\times g^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1},\dots,u_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}.
\end{aligned} \tag{18}$$

In particular, for $n=1$ $\langle f^{(1)},g^{(1)}\rangle_{ext} = \langle f^{(1)},g^{(1)}\rangle$; in the case $n=2$ we have $\langle f^{(2)},g^{(2)}\rangle_{ext} = \langle f^{(2)},g^{(2)}\rangle + \frac{\|p_2\|_\nu^2}{2}\int_{\mathbb{R}_+} f^{(2)}(u,u)g^{(2)}(u,u)du$; in general $\langle f^{(n)},g^{(n)}\rangle_{ext} = \langle f^{(n)},g^{(n)}\rangle + \cdots$.

As is easy to see, formulas (18) hold true for $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$.

It follows from (18) that $\mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R}_+)$: by (14) $p_1(x) = x$ and therefore by (3)

$$\|p_1\|_\nu = 1; \tag{19}$$

and for $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ one can identify $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}$ with the proper subspace of $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ that consists of "vanishing on diagonals" elements (i.e., $f^{(n)}(u_1,\dots,u_n) = 0$ if there exist $k,j \in \{1,\dots,n\}$ such that $k \neq j$ but $u_k = u_j$). In this sense the *space $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ is an extension of $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}$* (this explains why we used the subindex *ext* in the designations $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{ext}$ and $|\cdot|_{ext}$). (As a consequence, the extended Fock space $\mathcal{F}_{ext}$ is an extension of the Fock space $\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}n!$.)

Remark. *A random process L of form (1) is a Poisson one if its Lévy measure $\nu(\Delta) = \delta_1(\Delta)$, i.e., if ν is a point mass at 1. This measure does not satisfy the conditions accepted in this paper, nevertheless, the next statements are fulfilled.*

1) Itô decomposition (7) holds true and can be interpreted as the "classical" CRP: now we have $f_n(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n) = f^{(n)}(u_1,\dots,u_n)x_1\cdots x_n$ and (see (1))

$$\begin{aligned}
I_n(f_n) &= n!\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\int_0^{u_n}\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_0^{u_2}\int_{\mathbb{R}} f^{(n)}(u_1,\dots,u_n)x_1\cdots x_n\\
&\qquad\times\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)\\
&= n!\int_0^\infty\int_0^{u_n}\cdots\int_0^{u_2} f^{(n)}(u_1,\dots,u_n)dL_{u_1}\cdots dL_{u_n}.
\end{aligned} \tag{20}$$

2) Decomposition (11) holds true, now $:\langle\circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle:$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} = \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, are the generalized Charlier polynomials that can be identified with repeated stochastic integrals (20).

3) The original Nualart–Schoutens decomposition [24] (see also [29, 10, 9]) holds true, now $Y^{(1)} = L$ and $Y^{(l)} = 0$ if $l > 1$.

4) Polynomials (14) are not uniquely defined if $n > 2$; nevertheless, for any "version" of p_n, $n > 1$, we have $\|p_n\|_\nu = 0$. Therefore one still can define "versions" of the random measures $Y^{(n)}(\Delta)$, but representations (16) takes now the form

$$\begin{aligned}
:\langle\circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle: &= \int_{\mathbb{R}_+^n} f^{(n)}(u_1,\dots,u_n)Y^{(1)}(du_1)\cdots Y^{(1)}(du_n)\\
&= n!\int_0^\infty\int_0^{u_n}\cdots\int_0^{u_2} f^{(n)}(u_1,\dots,u_n)Y^{(1)}(du_1)\cdots Y^{(1)}(du_n)\\
&= n!\int_0^\infty\int_0^{u_n}\cdots\int_0^{u_2} f^{(n)}(u_1,\dots,u_n)dL_{u_1}\cdots dL_{u_n}
\end{aligned}$$

(all another integrals from (16) are equal to zero in (L^2)).

5) Formula (18) becomes

$$\langle f^{(n)}, g^{(n)}\rangle_{ext} = \int_{\mathbb{R}_+^n} f^{(n)}(u_1,\dots,u_n)g^{(n)}(u_1,\dots,u_n)du_1\cdots du_n = \langle f^{(n)}, g^{(n)}\rangle,$$

and this is natural because now $\mathcal{H}_{ext}^{(n)} = \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}$.

Finally we establish the following statement (cf. [2]).

Proposition. *The kernels $f_n \in L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}$, $n \in \mathbb{N}$, from Itô decomposition (7) for $F \in (L^2)$, can be presented in the form*

$$\begin{aligned}
f_n(\cdot_1,\bullet_1;\dots;\cdot_n,\bullet_n) &= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ s_1+\dots+s_k=n}} \frac{(l_1s_1+\dots+l_ks_k)!}{s_1!\cdots s_k!(l_1!)^{s_1}\cdots(l_k!)^{s_k}}\\
&\times\big[f^{(l_1s_1+\dots+l_ks_k)}(\underbrace{\cdot_1,\dots,\cdot_1}_{l_1},\dots,\underbrace{\cdot_{s_1},\dots,\cdot_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{\cdot_n,\dots,\cdot_n}_{l_k})\\
&\times p_{l_1}(\bullet_1)\cdots p_{l_1}(\bullet_{s_1})\cdots p_{l_k}(\bullet_n)\big]_{sym}
\end{aligned} \tag{21}$$

(the equality in $L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}$), where $f^{(k)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, are the kernels from decomposition (11) for F.

Proof. Formally one can obtain (21) by direct calculation with use (7), (6), (11), (16) and (17), but we have to show that the series in the right hand side of (21) converges in $L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}$ and can be integrated term by term by $\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)$. Fix $n \in \mathbb{N}$ and for $M \in \mathbb{N}$ set

$$\begin{aligned}
S_M(\cdot_1,\bullet_1;\dots;\cdot_n,\bullet_n) &:= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ M\geq l_1>\dots>l_k,\\ s_1+\dots+s_k=n}} \frac{(l_1s_1+\dots+l_ks_k)!}{s_1!\cdots s_k!(l_1!)^{s_1}\cdots(l_k!)^{s_k}}\\
&\times\big[f^{(l_1s_1+\dots+l_ks_k)}(\underbrace{\cdot_1,\dots,\cdot_1}_{l_1},\dots,\underbrace{\cdot_{s_1},\dots,\cdot_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{\cdot_n,\dots,\cdot_n}_{l_k})\\
&\times p_{l_1}(\bullet_1)\cdots p_{l_1}(\bullet_{s_1})\cdots p_{l_k}(\bullet_n)\big]_{sym} \in L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}.
\end{aligned}$$

It follows from the Nualart–Schoutens decomposition for F and (15) that

$$\exists\,(L^2)-\lim_{M\to\infty}\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^n} S_M(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n)\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)$$
$$=\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ s_1+\dots+s_k=n}}\frac{(l_1s_1+\dots+l_ks_k)!}{s_1!\cdots s_k!(l_1!)^{s_1}\cdots(l_k!)^{s_k}}$$
$$\times\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^n}\big[f^{(l_1s_1+\dots+l_ks_k)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1},\dots,u_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{u_n,\dots,u_n}_{l_k})$$
$$\times p_{l_1}(x_1)\cdots p_{l_1}(x_{s_1})\cdots p_{l_k}(x_n)\big]_{sym}\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n).$$

Further, since $\left(\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^n} S_M(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n)\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)\right)_{M\in\mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence in (L^2), by (6) and (9) $(S_M)_{M\in\mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence in the space $L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}$, therefore

$$\exists\,L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}-\lim_{M\to\infty}S_M(\cdot_1,\bullet_1;\dots;\cdot_n,\bullet_n)=S_\infty(\cdot_1,\bullet_1;\dots;\cdot_n,\bullet_n)$$
$$=\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ s_1+\dots+s_k=n}}\frac{(l_1s_1+\dots+l_ks_k)!}{s_1!\cdots s_k!(l_1!)^{s_1}\cdots(l_k!)^{s_k}}$$
$$\times\big[f^{(l_1s_1+\dots+l_ks_k)}(\underbrace{\cdot_1,\dots,\cdot_1}_{l_1},\dots,\underbrace{\cdot_{s_1},\dots,\cdot_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{\cdot_n,\dots,\cdot_n}_{l_k})$$
$$\times p_{l_1}(\bullet_1)\cdots p_{l_1}(\bullet_{s_1})\cdots p_{l_k}(\bullet_n)\big]_{sym}.$$

Again by (6) and (9)

$$\Big\|\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^n}(S_\infty(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n)-S_M(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n))$$
$$\times\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)\Big\|^2_{(L^2)}=n!\|S_\infty-S_M\|^2_{L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}}\underset{M\to\infty}{\to}0,$$

therefore $\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^n}S_\infty(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n)\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)$ can be calculated term by term, thus the statement of the proposition is proved. □

More information about described above generalizations of the CRP and about the interconnection between them is given in [22, 2, 30]. Of course, another generalizations of the CRP are also possible, see, e.g., [10, 9] for a corresponding example.

2 Extended stochastic integrals

2.1 Constructions and some properties of extended stochastic integrals

Let $\mathcal{N}$ be a family of all sets $O\in\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ such that $\mu(O)=0$ (we recall that the σ-algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ is augmented with respect to μ); $\widetilde{\mathcal{F}}_t=\sigma(L_u:u\le t)$ be the σ-algebra generated by the random process L up to a moment of time t; $\mathcal{F}_t:=\bigcap_{u>t}\widetilde{\mathcal{F}}_u\cup\mathcal{N}$. Then $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a flow of σ-algebras. It folows from the definition of L, its representation in the form $L_t=\langle\circ,1_{[0,t)}\rangle$, and (13) that *$L$ is a locally square integrable random process with orthogonal independent increments.*

Therefore *L is a martingale with respect to the flow $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$* with a Doob-Meyer decomposition $L_t^2=m_t+A_t$, $t\in\mathbb{R}_+$, where m is an $\mathcal{F}_t$-martingale and A is an increasing *nonrandom* function [12]. One can easily show that now $A_t=t$, thus, *L is a locally square integrable normal $\mathcal{F}_t$-martingale.* Therefore one can consider the Itô stochastic integral with respect to L $\int_{\mathbb{R}_+}\circ(u)dL_u:(L^2)\otimes\mathcal{H}\to(L^2)$ with the domain

$$\mathrm{dom}\Big(\int_{\mathbb{R}_+}\circ(u)dL_u\Big)=\{F\in(L^2)\otimes\mathcal{H}:F\text{ is adapted with respect to }(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}\}.\qquad(22)$$

But since the class of $\mathcal{F}_t$-adapted functions is a comparatively narrow subset of $(L^2)\otimes\mathcal{H}$, it is natural to try to extend the notion of a stochastic integral to a more wide class of elements from $(L^2)\otimes\mathcal{H}$. An idea of such an extension can be the following. Let $F\in(L^2)\otimes\mathcal{H}$. Then by (7) F can be presented in the form

$$F(\cdot)=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(f_{n,\cdot}),\quad f_{n,\cdot}\in L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n}\otimes\mathcal{H}.\qquad(23)$$

Since the integration by the random measure $Y^{(1)}$ (see (15)) is an extension of the integration in the Itô sense by the Lévy process L ($L_t=Y^{(1)}([0,t])$), and since by (15), (6)

$$\int_{\mathbb{R}_+}I_n(f_{n,u})Y^{(1)}(du)=\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}I_n(f_{n,u})x\widetilde{N}(du,dx)$$
$$=\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^{n+1}}f_{n,u}(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n)x\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)\widetilde{N}(du,dx)$$
$$=\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^{n+1}}[f_{n,u}(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n)x]_{sym}\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)\widetilde{N}(du,dx)$$
$$=I_{n+1}(\widehat{f}_n),$$

where $\widehat{f}_n:=[f_{n,\cdot}(\cdot_1,\bullet_1;\dots;\cdot_n,\bullet_n)\bullet]_{sym}\in L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n+1}$, it is natural to define an extended stochastic integral $\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\widetilde{d}L_u\in(L^2)$ by setting (cf. [10])

$$\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\widetilde{d}L_u:=\sum_{n=0}^{\infty}I_{n+1}(\widehat{f}_n).\qquad(24)$$

The domain of this integral, i.e., of the operator $\int_{\mathbb{R}_+}\circ(u)\widetilde{d}L_u:(L^2)\otimes\mathcal{H}\to(L^2)$, consists of $F\in(L^2)\otimes\mathcal{H}$ such that (see (8))

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\widetilde{d}L_u\Big\|^2_{(L^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\|\widehat{f}_n\|^2_{L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes}n+1}}<\infty.\qquad(25)$$

Let $t_1,t_2\in[0,+\infty]$, $t_1<t_2$. We define an extended stochastic integral $\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widetilde{d}L_u:(L^2)\otimes\mathcal{H}\to(L^2)$ by setting

$$\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widetilde{d}L_u:=\int_{\mathbb{R}_+}\circ(u)1_{[t_1,t_2)}(u)\widetilde{d}L_u,\qquad(26)$$

i.e., instead of $F\in(L^2)\otimes\mathcal{H}$ we integrate the element $F1_{[t_1,t_2)}\in(L^2)\otimes\mathcal{H}$. The domain of integral (26) depends on t_1 and t_2: now the kernels in estimate (25) depend on t_1 and t_2. Note that by analogy with (26) one can define an extended stochastic integral $\int_\Delta\circ(u)\widetilde{d}L_u:(L^2)\otimes\mathcal{H}\to(L^2)$ for any Borel set $\Delta\subseteq\mathbb{R}_+$: it is necessary to use 1_Δ instead of $1_{[t_1,t_2)}$.

The next statement follows directly from results of [10] (see also [9]).

Theorem. *Let $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ be integrable by Itô (i.e., F satisfies (22)). Then for any $t_1, t_2 \in [0, +\infty]$, $t_1 < t_2$, F is integrable in the extended sense and*

$$\int_{t_1}^{t_2} F(u)\widetilde{d}L_u = \int_{t_1}^{t_2} F(u)dL_u. \tag{27}$$

Remark. *For convenience of a reader we describe an idea of a proof of this very important theorem. In the first place, by the Nualart–Schoutens decomposition one can show that for an integrable by Itô function F the kernels $f_{n,\cdot}$, $n \in \mathbb{N}$, from decomposition (23) satisfy equalities*

$$f_{n,\cdot}(\cdot_1, \bullet_1; \dots; \cdot_n, \bullet_n) = f_{n,\cdot}(\cdot_1, \bullet_1; \dots; \cdot_n, \bullet_n)1_{[0,\cdot)^n}(\cdot_1, \dots, \cdot_n).$$

Since under this conditions $\int_{\mathbb{R}_+} I_n(f_{n,u})Y^{(1)}(du) = \int_{\mathbb{R}_+} I_n(f_{n,u})dL_u$, $n \in \mathbb{Z}_+$, equality (27) follows directly from the construction of the extended stochastic integral. In the second place, since L is a normal martingale, for F satisfying (22) we have

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}_+} F(u)1_{[t_1,t_2)}(u)dL_u \Big\|_{(L^2)} = \|F1_{[t_1,t_2)}\|_{(L^2)\otimes\mathcal{H}},$$

therefore condition (25) for $F1_{[t_1,t_2)}$ is fulfilled.

Another idea of an extension of the Itô stochastic integral is based on term by term integration by $Y^{(1)}(du)$ of the Nualart–Schoutens decomposition for $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$. Namely, by (11) and (16) we have

$$\begin{aligned} F(\cdot) = f^{(0)}_{\cdot} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1 > \dots > l_k,\\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n}} \frac{n!}{s_1! \cdots s_k! (l_1!)^{s_1} \cdots (l_k!)^{s_k}} \\ \times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} f^{(n)}_{\cdot}(\underbrace{u_1, \dots, u_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{u_{s_1+\dots+s_k}, \dots, u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}) \\ \times Y^{(l_1)}(du_1) \cdots Y^{(l_k)}(du_{s_1+\dots+s_k}), \quad f^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}, \end{aligned} \tag{28}$$

therefore it is natural to define an extended stochastic integral $\int_{\mathbb{R}_+} F(u)\widehat{d}L_u \in (L^2)$ by setting

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} F(u)\widehat{d}L_u = \int_{\mathbb{R}_+} f^{(0)}_u dL_u + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1 > \dots > l_k,\\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n}} \frac{n!}{s_1! \cdots s_k! (l_1!)^{s_1} \cdots (l_k!)^{s_k}} \\ \times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} f^{(n)}_u(\underbrace{u_1, \dots, u_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{u_{s_1+\dots+s_k}, \dots, u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}) \\ \times Y^{(l_1)}(du_1) \cdots Y^{(l_k)}(du_{s_1+\dots+s_k}) Y^{(1)}(du). \end{aligned} \tag{29}$$

In order to describe the domain of this integral, denote

$$\widehat{f}^{(n)}_{l,s}(\underbrace{\cdot_1, \dots, \cdot_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{\cdot_{s_1+\dots+s_k}, \dots, \cdot_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}, \cdot)$$

$$:= \begin{cases} f^{(n)}_{\cdot}(\underbrace{\cdot_1, \dots, \cdot_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{\cdot_{s_1+\dots+s_k}, \dots, \cdot_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}), & \text{if } l_k > 1 \\ \sqrt{s_k+1} f^{(n)}_{\cdot}(\underbrace{\cdot_1, \dots, \cdot_1}_{l_1}, \dots, \cdot_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}, \dots, \cdot_{s_1+\dots+s_k}), & \text{if } l_k = 1 \end{cases}.$$

Then the domain of $\int_{\mathbb{R}_+} \circ(u)\widehat{d}L_u : (L^2) \otimes \mathcal{H} \to (L^2)$ consists of $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ such that

$$\begin{aligned} \Big\| \int_{\mathbb{R}_+} F(u)\widehat{d}L_u \Big\|^2_{(L^2)} = \int_{\mathbb{R}_+} |f^{(0)}_u|^2 du \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1 > \dots > l_k,\\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n}} \frac{n!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k} \\ \times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} |\widehat{f}^{(n)}_{l,s}(\underbrace{u_1, \dots, u_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{u_{s_1+\dots+s_k}, \dots, u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}, u)|^2 \\ \times du_1 \cdots du_{s_1+\dots+s_k} du < \infty, \end{aligned} \tag{30}$$

the representation for $\| \int_{\mathbb{R}_+} F(u)\widehat{d}L_u\|_{(L^2)}$ can be obtained by direct calculation with use (15), (6), (9), (19) and the orthogonality of polynomials (14) in $L^2(\mathbb{R}, \nu)$, see also Lemma 4.1 in [22].

Theorem. *The extended stochastic integrals $\int_{\mathbb{R}_+} \circ(u)\widetilde{d}L_u$ and $\int_{\mathbb{R}_+} \circ(u)\widehat{d}L_u$, given by (24) and (29) respectively, coincide.*

Proof. By definition, for $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$, $\int_{\mathbb{R}_+} F(u)\widetilde{d}L_u$ is the result of term by term integration of Itô decomposition (23) for F by $Y^{(1)}(du)$; and $\int_{\mathbb{R}_+} F(u)\widehat{d}L_u$ is the result of term by term integration of Nualart–Schoutens decomposition (28) for F by $Y^{(1)}(du)$, if the results of such integration belong to (L^2). Therefore it is sufficient to show that for each $n \in \mathbb{N}$ $\int_{\mathbb{R}_+} I_n(f_{n,u})Y^{(1)}(du)$ is the result of term by term integration of decomposition (28) for $I_n(f_{n,\cdot})$ by $Y^{(1)}(du)$.

Fix $n \in \mathbb{N}$. By (the proof of) (21), (6) and (15) decomposition (28) for $I_n(f_{n,\cdot})$ can be presented in the form

$$\begin{aligned} I_n(f_{n,\cdot}) = \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1 > \dots > l_k,\\ s_1 + \dots + s_k = n}} \frac{(l_1 s_1 + \dots + l_k s_k)!}{s_1! \cdots s_k! (l_1!)^{s_1} \cdots (l_k!)^{s_k}} \\ \times \int_{(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})^n} [f^{(l_1 s_1 + \dots + l_k s_k)}_{\cdot}(\underbrace{u_1, \dots, u_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{u_{s_1}, \dots, u_{s_1}}_{l_1}, \dots, \underbrace{u_n, \dots, u_n}_{l_k}) \\ \times p_{l_1}(x_1) \cdots p_{l_1}(x_{s_1}) \cdots p_{l_k}(x_n)]_{sym} \widetilde{N}(du_1, dx_1) \cdots \widetilde{N}(du_n, dx_n). \end{aligned} \tag{31}$$

For $M \in \mathbb{N}$ set

$$\begin{aligned} S_M(\cdot_1, \bullet_1; \dots; \cdot_n, \bullet_n; \cdot) := \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ M \ge l_1 > \dots > l_k,\\ s_1 + \dots + s_k = n}} \frac{(l_1 s_1 + \dots + l_k s_k)!}{s_1! \cdots s_k! (l_1!)^{s_1} \cdots (l_k!)^{s_k}} \\ \times [f^{(l_1 s_1 + \dots + l_k s_k)}_{\cdot}(\underbrace{\cdot_1, \dots, \cdot_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{\cdot_{s_1}, \dots, \cdot_{s_1}}_{l_1}, \dots, \underbrace{\cdot_n, \dots, \cdot_n}_{l_k}) \\ \times p_{l_1}(\bullet_1) \cdots p_{l_1}(\bullet_{s_1}) \cdots p_{l_k}(\bullet_n)]_{sym} \in L^2(\lambda \otimes \nu)^{\widehat{\otimes} n} \otimes \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Then by (6), (9) and (3)

$$\begin{aligned} \Big\| \int_{(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})^{n+1}} (f_{n,u}(u_1, x_1; \dots; u_n, x_n) - S_M(u_1, x_1; \dots; u_n, x_n; u)) \\ \times \widetilde{N}(du_1, dx_1) \cdots \widetilde{N}(du_n, dx_n) x \widetilde{N}(du, dx) \Big\|^2_{(L^2)} \\ = (n+1)! \|\widehat{f}_n - [S_M \bullet]_{sym}\|^2_{L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes} n+1}} \le (n+1)! \|f_{n,\cdot} - S_M\|^2_{L^2(\lambda\otimes\nu)^{\widehat{\otimes} n}\otimes\mathcal{H}} \underset{M\to\infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

therefore

$$\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^{n+1}} S_M(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n;u))\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)x\widetilde{N}(du,dx)$$
$$\underset{M\to\infty}{\to}\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^{n+1}} f_{n,u}(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n)\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)x\widetilde{N}(du,dx)$$
$$=\int_{\mathbb{R}_+} I_n(f_{n,u})Y^{(1)}(du)$$

in (L^2) (see (6), (15)). But by construction

$$\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^{n+1}} S_M(u_1,x_1;\dots;u_n,x_n;u))\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)x\widetilde{N}(du,dx)$$

tends in (L^2) to the result of term by term integration of the right hand side of (31) by $Y^{(1)}(du)$ as $M\to\infty$, thus the necessary statement is obtained.

Finally, the domains of integrals (24) and (29) coincide because both these domains are given by the condition: the result of integration is an element of (L^2), see (25) and (30). □

By analogy with (26) for $t_1,t_2\in[0,+\infty]$, $t_1<t_2$, set

$$\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widehat{d}L_u:=\int_{\mathbb{R}_+}\circ(u)1_{[t_1,t_2)}(u)\widehat{d}L_u, \tag{32}$$

then $\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widehat{d}L_u=\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widetilde{d}L_u$. In what follows, we denote integrals (24), (29) by $\int_{\mathbb{R}_+}\circ(u)\widehat{d}L_u$, integrals (26) and (32) by $\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widehat{d}L_u$.

Remark. *Let $F\in(L^2)\otimes\mathcal{H}$ be such that the kernels from decomposition (28) $f_\cdot^{(n)}\in\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}\otimes\mathcal{H}\subset\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$ (the inclusion in the generalized sense described above), $n\in\mathbb{N}$, i.e., all $f_\cdot^{(n)}$ "vanish on diagonals". In this case (28) has a form*

$$\begin{aligned}F(\cdot)&=f_\cdot^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n}f_\cdot^{(n)}(u_1,\dots,u_n)Y^{(1)}(du_1)\cdots Y^{(1)}(du_n)\\&=f_\cdot^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}n!\int_0^\infty\int_0^{u_n}\cdots\int_0^{u_2}f_\cdot^{(n)}(u_1,\dots,u_n)dL_{u_1}\cdots dL_{u_n};\end{aligned}\tag{33}$$

(23) reduces by (31) to

$$\begin{aligned}F(\cdot)&=f_{0,\cdot}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^n}f_\cdot^{(n)}(u_1,\dots,u_n)x_1\cdots x_n\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_n,dx_n)\\&=f_{0,\cdot}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n}f_\cdot^{(n)}(u_1,\dots,u_n)Y^{(1)}(du_1)\cdots Y^{(1)}(du_n)\end{aligned}$$

(see (14) and (15)); and the extended stochastic integral can be constructed as in the Poisson analysis: by (24)

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\widehat{d}L_u\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})^{n+1}}\widehat{f}^{(n)}(u_1,\dots,u_{n+1})x_1\cdots x_{n+1}\widetilde{N}(du_1,dx_1)\cdots\widetilde{N}(du_{n+1},dx_{n+1})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\int_0^\infty\int_0^{u_{n+1}}\cdots\int_0^{u_2}\widehat{f}^{(n)}(u_1,\dots,u_{n+1})dL_{u_1}\cdots dL_{u_{n+1}},\end{aligned}\tag{34}$$

where $\widehat{f}^{(n)}\in\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n+1}\subset\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, are the symmetrizations of $f_\cdot^{(n)}$ by all arguments (more exactly, the projections of $f_\cdot^{(n)}\in\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}\otimes\mathcal{H}$ onto $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n+1}$).

Finally, by (11) any $F\in(L^2)\otimes\mathcal{H}$ can be uniquely presented in the form

$$F(\cdot)=\sum_{n=0}^{\infty}:\langle\circ^{\otimes n},f_\cdot^{(n)}\rangle:,\quad f_\cdot^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}, \tag{35}$$

therefore it is natural to construct an extended stochastic integral that is based on this decomposition and correlated with the structure of the spaces $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. In the case when L is a process of Meixner type (e.g., [22]), such an integral is constructed and studied in [17]. The idea of its construction is the following. Let at first the kernels from (35) $f_\cdot^{(n)}\in\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}\otimes\mathcal{H}\subset\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Then by (16) decomposition (35) reduces to (33) and the extended stochastic integral can be defined by (34) that now can be written in the form

$$\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\widehat{d}L_u=\sum_{n=0}^{\infty}:\langle\circ^{\otimes n+1},\widehat{f}^{(n)}\rangle:,\quad\widehat{f}^{(n)}\in\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n+1}. \tag{36}$$

Of course, general elements of $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$ can not be projected onto $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$; nevertheless, by $f_\cdot^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$ one can construct kernels $\widehat{f}^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ that can be used in order to define the extended stochastic integral by (36). For a Lévy process L that we consider in this paper, the situation is quite analogous. Namely, let $f_\cdot^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$, $n\in\mathbb{N}$. We select a representative (a function) $\dot{f}_\cdot^{(n)}\in f_\cdot^{(n)}$ such that

$$\dot{f}_u^{(n)}(u_1,\dots,u_n)=0\text{ if for some k}\in\{1,\dots,\text{n}\}\ u=u_k. \tag{37}$$

Let $\widetilde{f}^{(n)}$ be the symmetrization of $\dot{f}_\cdot^{(n)}$ by $n+1$ variables. Define $\widehat{f}^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ as the equivalence class in $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ generated by $\widetilde{f}^{(n)}$.

Lemma. *For each $f_\cdot^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$, $n\in\mathbb{N}$, the element $\widehat{f}^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ is well-definite (in particular, $\widehat{f}^{(n)}$ does not depend on a choice of a representative $\dot{f}_\cdot^{(n)}\in f_\cdot^{(n)}$ satisfying (37)) and*

$$|\widehat{f}^{(n)}|_{ext}\le|f_\cdot^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}}. \tag{38}$$

Proof. Let $f_\cdot^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$, $n\in\mathbb{N}$, and $\dot{f}_\cdot^{(n)}\in f_\cdot^{(n)}$ be a representative of $f_\cdot^{(n)}$ satisfying (37). Without loss of generality we can assume that $\dot{f}_\cdot^{(n)}(\cdot_1,\dots,\cdot_n)$ is a symmetric function by the arguments $\cdot_1,\dots,\cdot_n$, therefore

$$\begin{aligned}\widetilde{f}^{(n)}(u_1,\dots,u_n,u)=&\frac{1}{n+1}\Big[\dot{f}_u^{(n)}(u_1,\dots,u_n)\\&+\dot{f}_{u_n}^{(n)}(u,u_1,\dots,u_{n-1})+\dots+\dot{f}_{u_1}^{(n)}(u_2,\dots,u_n,u)\Big].\end{aligned}\tag{39}$$

Denote $\ddot{f}^{(n)}(u_1,\dots,u_n,u):=\dot{f}_u^{(n)}(u_1,\dots,u_n)$. Using (18) and the well-known inequality

$\big|\sum_{l=1}^{p} a_l\big|^2 \leq p\sum_{l=1}^{p}|a_l|^2$ we obtain

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{f}^{(n)}|^2_{ext} = & \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n+1}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\\
&\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}}|\widetilde{f}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}\\
\leq & \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n+1}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\frac{n+1}{(n+1)^2}\\
&\times\Big[\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}}|\ddot{f}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}\\
&+\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}}|\ddot{f}^{(n)}(u_{s_1+\dots+s_k},\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k-1})|^2du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}\\
&+\dots+\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}}|\ddot{f}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1-1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k},u_1)|^2du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}\Big]
\end{aligned}
$$

(arguments over $\underbrace{\quad}_{0}$ are absent). It follows from (37) that if $l_k > 1$ then all terms in square brackets $[\cdots]$ are equal to zero; and if $l_k = 1$ then for a fixed collection $k, l., s.$ all nonzero terms in square brackets $[\cdots]$ coincide and the quantity of such terms is equal to s_k. Therefore we can continue our calculation as follows:

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{f}^{(n)}|^2_{ext} \leq & \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>1,\\ l_1s_1+\dots+(s_k-1)=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots s_{k-1}!(s_k-1)!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}}\\
&\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}}|\ddot{f}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,u_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,u_{s_1+\dots+s_k})|^2du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}\\
= & \sum_{\substack{k',l'_j,s'_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k',\ l'_1>\dots>l'_{k'},\\ l'_1s'_1+\dots+l'_{k'}s'_{k'}=n}} \frac{n!}{s'_1!\cdots s'_{k'}!}\Big(\frac{\|p_{l'_1}\|_\nu}{l'_1!}\Big)^{2s'_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l'_{k'}}\|_\nu}{l'_{k'}!}\Big)^{2s'_{k'}}\\
&\times\int_{\mathbb{R}_+^{s'_1+\dots+s'_{k'}+1}}|\dot{f}_u^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l'_1},\dots,\underbrace{u_{s'_1+\dots+s'_{k'}},\dots,u_{s'_1+\dots+s'_{k'}}}_{l'_{k'}})|^2du_1\cdots du_{s'_1+\dots+s'_{k'}}du\\
= & |\dot{f}_{\cdot}^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

(here we used (19)), hence $\widetilde{f}^{(n)}$ generates an equivalence class $\widehat{f}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ and estimate (38) is fulfilled.

Let $\dot{g}_{\cdot}^{(n)} \in f_{\cdot}^{(n)}$ be another representative of $f_{\cdot}^{(n)}$ with property (37), $\widehat{g}^{(n)}$ be the corresponding element of $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$. Then, obviously, $\dot{h}_{\cdot}^{(n)} := \dot{f}_{\cdot}^{(n)} - \dot{g}_{\cdot}^{(n)} \in 0 \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$ satisfies (37) and the corresponding to $\dot{h}_{\cdot}^{(n)}$ element of $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ $\widehat{h}^{(n)} = \widehat{f}^{(n)} - \widehat{g}^{(n)} = 0$ by (38). So, $\widehat{f}^{(n)}$ does not depend on a choice of a representative $\dot{f}_{\cdot}^{(n)} \in f_{\cdot}^{(n)}$. □

For $F \in (L^2)\otimes\mathcal{H}$ we define an extended stochastic integral $\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\delta L_u \in (L^2)$ by setting

$$\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\delta L_u := \sum_{n=0}^{\infty}:\langle\circ^{\otimes n+1},\widehat{f}^{(n)}\rangle:,\quad \widehat{f}^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}, \tag{40}$$

where $\widehat{f}^{(0)} := f_{\cdot}^{(0)} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_{ext}^{(1)}$, and $\widehat{f}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, are constructed by the kernels $f_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$ from decomposition (35) for F. The domain of this integral, i.e., of the operator $\int_{\mathbb{R}_+}\circ(u)\delta L_u : (L^2)\otimes\mathcal{H}\to(L^2)$, consists of $F \in (L^2)\otimes\mathcal{H}$ such that (see (12))

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\delta L_u\Big\|^2_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!|\widehat{f}^{(n)}|^2_{ext} < \infty. \tag{41}$$

Theorem. *The extended stochastic integrals $\int_{\mathbb{R}_+}\circ(u)\widehat{d}L_u$ and $\int_{\mathbb{R}_+}\circ(u)\delta L_u$, given by* (29) *and* (40) *respectively, coincide.*

Proof. Let at first $F(\cdot) = :\langle\circ^{\otimes n}, f_{\cdot}^{(n)}\rangle: \in (L^2)\otimes\mathcal{H}$, $f_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$. Using (40), (16), the construction of the kernel $\widehat{f}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ (in particular, (39)) and (29) we obtain

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\delta L_u = &:\langle\circ^{\otimes n+1},\widehat{f}^{(n)}\rangle: = \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n+1}}\frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!(l_1!)^{s_1}\cdots(l_k!)^{s_k}}\\
&\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}}\widetilde{f}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})\\
&\times Y^{(l_1)}(du_1)\cdots Y^{(l_k)}(du_{s_1+\dots+s_k})\\
= & \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k=1,\\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+(s_k-1)=n}}\frac{n!(n+1)s_k}{s_1!\cdots s_{k-1}!(s_k-1)!s_k(l_1!)^{s_1}\cdots(l_{k-1}!)^{s_{k-1}}(n+1)}\\
&\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+(s_k-1)+1}}\dot{f}_u^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,u_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,u_{s_1+\dots+(s_k-1)})\\
&\times Y^{(l_1)}(du_1)\cdots Y^{(1)}(du_{s_1+\dots+(s_k-1)})Y^{(1)}(du)\\
= & \int_{\mathbb{R}_+}:\langle\circ^{\otimes n}, f_u^{(n)}\rangle:Y^{(1)}(du) = \int_{\mathbb{R}_+}F(u)\widehat{d}L_u.
\end{aligned}
$$

In a general case the result follows from the obtained equality, (40) and (29); the domains of integrals (29) and (40) coincide because both these domains are given by the condition: the result of integration is an element of (L^2), see (30) and (41). □

By analogy with (26), (32) for $t_1, t_2 \in [0,+\infty]$, $t_1 < t_2$, set

$$\int_{t_1}^{t_2}F(u)\delta L_u := \int_{\mathbb{R}_+}F(u)1_{[t_1,t_2)}(u)\delta L_u, \tag{42}$$

then $\int_{t_1}^{t_2}F(u)\delta L_u = \int_{t_1}^{t_2}F(u)\widehat{d}L_u$. In what follows, we denote integrals (40) and (42) by $\int_{\mathbb{R}_+}F(u)\widehat{d}L_u$ and $\int_{t_1}^{t_2}F(u)\widehat{d}L_u$ respectively. Of course, the domain of integral (42) depends on t_1 and t_2 and can be described by (41), where the kernels $\widehat{f}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, are replaces by the kernels $\widehat{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ constructed with use of $F(\cdot)1_{[t_1,t_2)}(\cdot)$ instead of $F(\cdot)$.

Remark. *Since integrals (32) and (42) coincide with the extended stochastic integral (26), these integrals are extensions of the Itô stochastic integral. Note that for integral (42) this fact can be proved by analogy with the corresponding proof in the "Meixner analysis" [17] (see also [19]) with using results of [4].*

2.2 A Hida stochastic derivative and its interconnection with the extended stochastic integral

As is well known, in the "Poisson analysis" the extended stochastic integral is the conjugate operator of the Hida stochastic derivative. In the "Meixner analysis" the situation is analogous [17]. Now we will show that this result holds true in the "Lévy analysis".

In order to define a stochastic derivative on (L^2) we need some preparation. Let $g^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\dot{g}^{(n)} \in g^{(n)}$ be a representative of $g^{(n)}$. We consider $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$, i.e., separate one argument of $g^{(n)}$, and define $g^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ as the equivalence class in $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ generated by $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$.

Lemma. *For each $g^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, the element $g^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ is well-definite (in particular, $g^{(n)}(\cdot)$ does not depend on a choice of a representative $\dot{g}^{(n)} \in g^{(n)}$) and*

$$|g^{(n)}(\cdot)|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)}\otimes\mathcal{H}} \leq |g^{(n)}|_{ext}. \tag{43}$$

Proof. Without loss of generality we can assume that $\dot{g}^{(n)}$ is a symmetric function, therefore one can separate the last argument. Using (18) and (19) one can write

$$|g^{(n)}|_{ext}^2 = |\dot{g}^{(n)}|_{ext}^2 = \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}$$
$$\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} |\dot{g}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}$$
$$= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k>1,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}$$
$$\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} |\dot{g}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}$$
$$+ \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k=1,\\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+(s_k-1)=n-1}} \frac{(n-1)!n}{s_1!\cdots s_{k-1}!(s_k-1)!s_k}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}}$$
$$\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+(s_k-1)+1}} |\dot{g}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,u_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,u_{s_1+\dots+(s_k-1)},u)|^2$$
$$\times du_1\cdots du_{s_1+\dots+(s_k-1)}du \geq |\dot{g}^{(n)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)}\otimes\mathcal{H}} = |g^{(n)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)}\otimes\mathcal{H}}$$

because $n \geq s_k$, hence $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$ generates an equivalence class $g^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ and estimate (43) is fulfilled.

Let $\dot{f}^{(n)} \in g^{(n)}$ be another representative of $g^{(n)}$, $f^{(n)}(\cdot)$ be the corresponding element of $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$. Then $\dot{h}^{(n)} := \dot{g}^{(n)} - \dot{f}^{(n)} \in 0 \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ and the corresponding to $\dot{h}^{(n)}$ element of $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ $h^{(n)}(\cdot) = g^{(n)}(\cdot) - f^{(n)}(\cdot) = 0$ by (43). So, $g^{(n)}(\cdot)$ does not depend on a choice of a representative $\dot{g}^{(n)} \in g^{(n)}$. □

Remark. *Note that in spite of estimate (43) the space $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, can not be considered as a subspace of $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ because different elements of $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ can coincide as elements of $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$.*

Let $t_1, t_2 \in [0,+\infty]$, $t_1 < t_2$. We define a Hida stochastic derivative $1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.G \in (L^2)\otimes\mathcal{H}$ for $G \in (L^2)$ by setting

$$1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.G := \sum_{n=0}^{\infty}(n+1){:}\langle\circ^{\otimes n}, g^{(n+1)}(\cdot)1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\rangle{:}, \tag{44}$$

where $g^{(n+1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, are the kernels from decomposition (11) for G, in point as elements of $\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$. The domain of this derivative, i.e., of the operator $1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial. : (L^2) \to (L^2)\otimes\mathcal{H}$, consists of $G \in (L^2)$ such that

$$\|1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.G\|^2_{(L^2)\otimes\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!(n+1)|g^{(n+1)}(\cdot)1_{[t_1,t_2)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}} < \infty. \tag{45}$$

Theorem. *For arbitrary $t_1, t_2 \in [0,+\infty]$, $t_1 < t_2$, the extended stochastic integral $\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widehat{d}L_u : (L^2)\otimes\mathcal{H} \to (L^2)$ and the Hida stochastic derivative $1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial. : (L^2) \to (L^2)\otimes\mathcal{H}$ are conjugated one to another:*

$$\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widehat{d}L_u = (1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.)^*\circ, \qquad 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial. = \Big(\int_{t_1}^{t_2}\circ\widehat{d}L\Big)^*_. \tag{46}$$

In particular, $\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widehat{d}L_u$ and $1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.$ are closed operators.

Proof. First we note that the operators $(1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.)^*$ and $\big(\int_{t_1}^{t_2}\circ\widehat{d}L\big)^*_.$ are well-definite because the domains of $1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.$ and $\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widehat{d}L_u$ are dense sets in the corresponding spaces. Further, let us show that for $F \in \mathrm{dom}(\int_{t_1}^{t_2}\circ(u)\widehat{d}L_u)$ and $G \in \mathrm{dom}(1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.)$

$$\Big(\int_{t_1}^{t_2}F(u)\widehat{d}L_u, G\Big)_{(L^2)} = (F(\cdot), 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.G)_{(L^2)\otimes\mathcal{H}}. \tag{47}$$

By (42), (40), (11) and (13)

$$\Big(\int_{t_1}^{t_2}F(u)\widehat{d}L_u, G\Big)_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!(\widehat{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}, g^{(n+1)})_{ext},$$

where $\widehat{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}, g^{(n+1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, are the kernels from decompositions (40) and (11) for $\int_{t_1}^{t_2}F(u)\widehat{d}L_u$ and G correspondingly. On the other hand, it follows from (35), (44) and (13) that

$$(F(\cdot), 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial.G)_{(L^2)\otimes\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!(f^{(n)}_{\cdot}, g^{(n+1)}(\cdot)1_{[t_1,t_2)}(\cdot))_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}},$$

where $f_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, are the kernels from decomposition (35) for F, $g^{(n+1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, are the kernels from decomposition (11) for G, in point as elements of $\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$. Therefore in order to prove (47) it is sufficient to show that for each $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\langle \widetilde{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}, g^{(n+1)} \rangle_{ext} = (f_\cdot^{(n)}, g^{(n+1)}(\cdot)1_{[t_1,t_2)}(\cdot))_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}}.$$

The case $n = 0$ is trivial, so we consider the case $n \in \mathbb{N}$. Let $\dot{f}_\cdot^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n) \in f_\cdot^{(n)}$ be a representative of $f_\cdot^{(n)}$ satisfying (37) and symmetric by the arguments $\cdot_1, \ldots, \cdot_n$, $\dot{g}^{(n+1)} \in g^{(n+1)}$ be a symmetric representative of $g^{(n+1)}$. Denote $\ddot{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}(u_1, \ldots, u_n, u) := \dot{f}_u^{(n)}(u_1, \ldots, u_n)1_{[t_1,t_2)}(u)$, and let $\widetilde{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}$ be the symmetrization of $\ddot{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}$ by all arguments. Then, obviously, $\widetilde{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)} \in \widetilde{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}$. Using (18) and (19) we obtain

$$\begin{aligned}
&\langle \widetilde{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}, g^{(n+1)} \rangle_{ext} = \langle \widetilde{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}, \dot{g}^{(n+1)} \rangle_{ext} \\
&= \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\ldots,k,\ l_1 > \cdots > l_k, \\ l_1 s_1 + \cdots + l_k s_k = n+1}} \frac{(n+1)!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k} \\
&\times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} \widetilde{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}) \\
&\times \dot{g}^{(n+1)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}) du_1 \cdots du_{s_1+\cdots+s_k} \\
&= \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\ldots,k,\ l_1 > \cdots > l_k, \\ l_1 s_1 + \cdots + l_k s_k = n+1}} \frac{n!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k} \\
&\times \Big[\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} \ddot{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}) \\
&\times \dot{g}^{(n+1)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}) du_1 \cdots du_{s_1+\cdots+s_k} \\
&+ \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} \ddot{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}(u_{s_1+\cdots+s_k} \underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k-1}) \\
&\times \dot{g}^{(n+1)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}) du_1 \cdots du_{s_1+\cdots+s_k} \\
&+ \cdots + \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} \ddot{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1-1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}, u_1) \\
&\times \dot{g}^{(n+1)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}) du_1 \cdots du_{s_1+\cdots+s_k} \Big] \\
&= \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\ldots,k,\ l_1 > \cdots > l_k = 1, \\ l_1 s_1 + \cdots + l_{k-1} s_{k-1} + (s_k - 1) = n}} \frac{n!}{s_1! \cdots s_{k-1}!(s_k-1)!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+(s_k-1)+1}} \ddot{f}^{(n)}_{[t_1,t_2)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}, \ldots, u_{s_1+\cdots+(s_k-1)}, u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \dot{g}^{(n+1)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l_1}, \ldots, u_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}, \ldots, u_{s_1+\cdots+(s_k-1)}, u) du_1 \cdots du_{s_1+\cdots+(s_k-1)} du \\
&= (\dot{f}_\cdot^{(n)}, \dot{g}^{(n+1)}(\cdot)1_{[t_1,t_2)}(\cdot))_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}} = (f_\cdot^{(n)}, g^{(n+1)}(\cdot)1_{[t_1,t_2)}(\cdot))_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Now in order to prove equalities (46) it remains to show that the domains of the corresponding operators coincide.

1) Let us show that $\mathrm{dom}((1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot)^*) = \mathrm{dom}(\int_{t_1}^{t_2} \circ(u)\widehat{d}L_u)$. By definition, F belongs to $\mathrm{dom}((1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot)^*)$ if and only if $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ and

$$(L^2) \supset \mathrm{dom}(1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot) \ni G \mapsto (F(\cdot), 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot G)_{(L^2)\otimes\mathcal{H}}$$

is a linear continuous functional. By the Riesz's theorem this means that

$$(F(\cdot), 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot G)_{(L^2)\otimes\mathcal{H}} = (H, G)_{(L^2)}$$

with some $H \in (L^2)$. But it follows from uniqueness of representation (11) for elements of (L^2) and (the proof of) (47) that $H = \int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u$, i.e.,

$$F \in \mathrm{dom}((1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot)^*) \Leftrightarrow H \in (L^2) \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u \in (L^2) \Leftrightarrow F \in \mathrm{dom}\Big(\int_{t_1}^{t_2} \circ(u)\widehat{d}L_u\Big)$$

(see (41)).

2) Let us show that $\mathrm{dom}\Big(\big(\int_{t_1}^{t_2} \circ \widehat{d}L\big)_\cdot^*\Big) = \mathrm{dom}(1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot)$. By definition, G belongs to $\mathrm{dom}\Big(\big(\int_{t_1}^{t_2} \circ \widehat{d}L\big)_\cdot^*\Big)$ if and only if $G \in (L^2)$ and

$$(L^2) \otimes \mathcal{H} \supset \mathrm{dom}\Big(\int_{t_1}^{t_2} \circ(u)\widehat{d}L_u\Big) \ni F \mapsto \Big(\int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u, G\Big)_{(L^2)}$$

is a linear continuous functional. By the Riesz's theorem this is possible if and only if $\big(\int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u, G\big)_{(L^2)} = (F, H)_{(L^2)\otimes\mathcal{H}}$ with some $H \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$. But it follows from uniqueness of representation (35) for elements of $(L^2) \otimes \mathcal{H}$ and (the proof of) (47) that $H = 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot G$, i.e.,

$$G \in \mathrm{dom}\Big(\Big(\int_{t_1}^{t_2} \circ \widehat{d}L\Big)_\cdot^*\Big) \Leftrightarrow H \in (L^2) \otimes \mathcal{H} \Leftrightarrow 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot G \in (L^2) \otimes \mathcal{H} \Leftrightarrow G \in \mathrm{dom}(1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial_\cdot)$$

(see (45)). $\square$

Note that equalities (46) can be used as alternative definitions of the extended stochastic integral and the Hida stochastic derivative.

Remark. *Equality (47) can be written in the form*

$$\Big(\int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u, G\Big)_{(L^2)} = \int_{t_1}^{t_2} (F(u), \partial_u G)_{(L^2)} du \equiv \int_{t_1}^{t_2} (\partial_u^\dagger F(u), G)_{(L^2)} du,$$

therefore it is natural to write the operator $\int_{t_1}^{t_2} \circ(u)\widehat{d}L_u$ formally as

$$\int_{t_1}^{t_2} \circ(u)\widehat{d}L_u = \int_{t_1}^{t_2} \partial_u^\dagger \circ (u) du$$

(cf. [17]), here $\partial_u^\dagger$ is the formal operator conjugated to the Hida stochastic derivative at the point u (cf. [27, 20]). Strongly speaking, now for fixed $u \in \mathbb{R}_+$ the operators ∂_u and $\partial_u^\dagger$ are not well-definite (e.g., for $G \in (L^2)$ $\partial_u G$ is not uniquely defined), but such operators can be defined on suitable spaces of test and generalized functions respectively; a detailed presentation will be given in another paper.

Let us say several words about possible simple generalizations of the results of the present paper. In the first place, instead of the Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+$ one can use a non-atomic measure σ that satisfies some additional assumptions (cf. [22, 17]). In the second place, one can consider a complex-valued Lévy process, define (L^2) as the space of (classes of) complex-valued functions, and obtain "complex versions" of results presented above (cf. [17]). In the third place, one can consider the operators $\int_\Delta \circ(u)\widehat{d}L_u$ and $1_\Delta(\cdot)\partial.$ for any measurable $\Delta \subseteq \mathbb{R}_+$ using 1_Δ instead of $1_{[t_1,t_2)}$ in the corresponding places. Finally, it is possible to construct and to study the extended stochastic integral and the Hida stochastic derivative in the case when one uses instead of $\mathbb{R}_+$ a much more general space (cf. [22]).

Remark. *Since the extended stochastic integral and the Hida stochastic derivative are not continuous operators, it can be some problems with their applications. For example, the Itô stochastic integral has the following property: for any $t_1, t_2, t_3 \in [0, +\infty]$, $t_1 < t_2 < t_3$,*

$$\int_{t_1}^{t_2} \circ(u)dL_u + \int_{t_2}^{t_3} \circ(u)dL_u = \int_{t_1}^{t_3} \circ(u)dL_u. \tag{48}$$

This property, in particular, plays an important role in the theory of stochastic differential and integral equations. Formally the extended stochastic integral also satisfies (48), but since the domain of this integral depends on the interval of integration, the application of (48) in some situations can be impossible. In the forthcoming paper we will consider the extended stochastic integral of form (40), (42) and the Hida stochastic derivative of form (44) as linear continuous operators on suitable riggings of (L^2).

REFERENCES

[1] Accardi L., Fagnola F., Quaegebeur J. *A representation free quantum stochastic calculus.* J. Funct. Anal. 1992, **104** (1), 149–197. doi:10.1016/0022-1236(92)90094-Y

[2] Benth F.E., Di Nunno G., Lokka A., Øksendal B., Proske F. *Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes.* Math. Finance 2003, **13** (1), 55–72. doi:10.1111/1467-9965.t01-1-00005

[3] Benth F.E., Lokka A. *Anticipative calculus for Lévy processes and stochastic differential equations.* Stoch. Stoch. Rep. 2004, **76** (3), 191–211. doi:10.1080/10451120410001716880

[4] Berezansky Yu.M., Lytvynov E.W., Mierzejewski D.A. *The Jacobi field of a Lévy process.* Ukrainian Math. J. 2003, **55** (6), 853–858. doi:10.1023/B:UKMA.0000010261.64329.4c

[5] Berezansky Yu.M., Sheftel Z.G., Us G.F. Functional Analysis. Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 1996.

[6] Bertoin J. Lévy Processes. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[7] Dermoune A. *Distributions sur l'espace de P. Lévy et calcul stochastic.* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 1990, **26** (1), 101–119.

[8] Di Nunno G., Meyer-Brandis T., Øksendal B., Proske F. *Malliavin calculus and anticipative Itô formulae for Lévy processes.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2005, **8** (2), 235–258. doi:10.1142/S0219025705001950

[9] Di Nunno G., Øksendal B., Proske F. Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[10] Di Nunno G., Øksendal B., Proske F. *White noise analysis for Lévy processes.* J. Funct. Anal. 2004, **206** (1), 109–148. doi:10.1016/S0022-1236(03)00184-8

[11] Es-Sebaiy K., Tudor C.A. *Lévy processes and Itô-Skorokhod integrals.* Theory Stoch. Process 2008, **14** (2), 10–18.

[12] Gihman I.I., Skorohod A.V. Theory of Random Processes, Vol. 2. Nauka, Moscow, 1973. (in Russian)

[13] Holden H., Øksendal B., Uboe J., Zhang T.-S. Stochastic Partial Differential Equations — a Modeling, White Noise Functional Approach. Birkhäuser, Boston, 1996.

[14] Itô K. *Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments.* Trans. Amer. Math. Soc. 1956, **81**, 253–263. doi:10.1090/S0002-9947-1956-0077017-0

[15] Kabanov Yu.M. *Extended stochastic integrals.* Theory Probab. Appl. 1975, **20** (4), 725–737. (in Russian)

[16] Kabanov Yu.M., Skorohod A.V. Extended stochastic integrals. In: Proc. "School-Symposium Theory Stoch. Processes", Vilnus, USSR, 1975, Inst. Phys. Math., Vilnius, 1975, 123–167. (in Russian).

[17] Kachanovsky N.A. *On an extended stochastic integral and the Wick calculus on the connected with the generalized Meixner measure Kondratiev-type spaces.* Methods Funct. Anal. Topology 2007, **13** (4), 338–379.

[18] Kachanovsky N.A. *On the extended stochastic integral connected with the Gamma-measure on an infinite-dimensional space.* Methods Funct. Anal. Topology 2002, **8** (2), 10–32.

[19] Kachanovsky N.A., Tesko V.A. *Stochastic integral of Hitsuda-Skorohod type on the extended Fock space.* Ukrainian Math. J. 2009, **61** (6), 733–764. doi:10.1007/s11253-009-0257-2

[20] Kondratiev Yu.G., Lytvynov E.W. *Operators of gamma white noise calculus.* Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top. 2000, **3** (3), 303–335. doi:10.1142/S0219025700000236

[21] Lee Y.-J., Shih H.-H. *Analysis of generalized Lévy white noise functionals.* J. Funct. Anal. 2004, **211** (1), 1–70. doi:10.1016/j.jfa.2003.07.002

[22] Lytvynov E.W. *Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2003, **6** (1), 73–102. doi:10.1142/S0219025703001031

[23] Meyer P.A. Quantum Probability for Probabilists. In: Lect. Notes in Math., 1538. Springer Verlag, New-York, 1993.

[24] Nualart D., Schoutens W. *Chaotic and predictable representations for Lévy processes.* Stochastic Process. Appl. 2000, **90** (1), 109–122. doi:10.1016/S0304-4149(00)00035-1

[25] Øksendal B. *Stochastic partial differential equations driven by multy-parameter white noise of Lévy processes.* Quart. Appl. Math. 2008, **66** (3), 521–537. doi:10.1090/S0033-569X-08-01090-5

[26] Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations. Springer, Berlin, 1990.

[27] Rodionova I.V. *Analysis connected with generating functions of exponential type in one and infinite dimensions.* Methods Funct. Anal. Topology 2005, **11** (3), 275–297.

[28] Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. In: Cambridge University Studies in Advanced Mathematics, 68. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[29] Schoutens W. Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials. In: Lect. Notes in Statist., 146. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[30] Solé J.L., Utzet F., Vives J. *Chaos expansions and Malliavin calculus for Lévy processes.* Stoch. Anal. Appl., Abel Symposia 2007, **2**, 595–612. doi:10.1007/978-3-540-70847-6_27

[31] Surgailis D. On L^2 and non-L^2 multiple stochastic integration. In: Lect. Notes in Control and Information Sciences, 36. Springer-Verlag, Berlin, 1981, 212–226.

[32] Skorohod A.V. Integration in Hilbert Space, Springer, New York–Heidelberg, 1974.

[33] Skorohod A.V. *On a generalization of a stochastic integral.* TTheory Probab. Appl. 1975, **20** (2), 223–238. (in Russian)

Received 12.03.2013

Качановський М.О. *Про розширені стохастичні інтеграли за процесами Леві* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 256–278.

Позначимо через L процес Леві на $[0, +\infty)$. У частинних випадках, коли L — вінерівський чи пуассонівський процес, будь-яку квадратично інтегровну випадкову величину можна розкласти у ряд з повторних стохастичних інтегралів за L від невипадкових функцій. Ця властивість L, відома як властивість хаотичного розкладу (ВХР), відіграє дуже важливу роль у стохастичному аналізі. На жаль, взагалі кажучи, процес Леві не володіє ВХР.

Існують різноманітні узагальнення ВХР для процесів Леві. Зокрема, при підході Іто процес Леві L розкладають у суму гауссівського процесу та стохастичного інтеграла за пуассонівською випадковою мірою, після цього використовують ВХР для обох доданків з метою отримання узагальненої ВХР для L. Підхід Нуаларта та Скоутенса полягає у розкладі квадратично інтегровної випадкової величини у ряд з повторних стохастичних інтегралів від невипадкових функцій за так званими ортогоналізованими центрованими процесами степенів стрибків, ці процеси побудовані з використанням càdlàg версії L. Підхід Литвинова заснований на ортогоналізації неперервних поліномів у просторі квадратично інтегровних випадкових величин.

У цій статті ми будуємо розширений стохастичний інтеграл за процесом Леві та стохастичну похідну Хіди у термінах узагальненої ВХР, запропонованої Литвиновим; встановлюємо деякі властивості цих операторів; та, що є найбільш важливим, показуємо, що розширені стохастичні інтеграли, побудовані із застосуванням вищезгаданих узагальнень ВХР, співпадають.

Ключові слова і фрази: процес Леві, властивість хаотичного розкладу, розширений стохастичний інтеграл, стохастична похідна Хіди.

Качановский Н.А. *О расширенных стохастических интегралах по процессам Леви* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 256–278.

Обозначим через L процесс Леви на $[0, +\infty)$. В частных случаях, когда L — винеровский или пуассоновский процесс, любую квадратично интегрируемую случайную величину можно разложить в ряд из повторных стохастических интегралов по L от неслучайных функций. Это свойство L, известное как свойство хаотического разложения (СХР), играет очень важную роль в стохастическом анализе. К сожалению, вообще говоря, процесс Леви не имеет СХР.

Существуют различные обобщения СХР для процессов Леви. В частности, при подходе Ито процесс Леви L раскладывают в сумму гауссовского процесса и стохастического интеграла по пуассоновской случайной мере, затем используют СХР для обоих слагаемых с целью получения обобщенного СХР для L. Подход Нуаларта и Скоутенса состоит в разложении квадратично интегрируемой случайной величины в ряд из повторных стохастических интегралов от неслучайных функций по так называемым ортогонализованным центрированным процессам степеней скачков, эти процессы сконструированы с использованием càdlàg версии L. Подход Литвинова основан на ортогонализации непрерывных полиномов в пространстве квадратично интегрируемых случайных величин.

В этой статье мы конструируем расширенный стохастический интеграл по процессу Леви и стохастическую производную Хиды в терминах обобщенного СХР, предложенного Литвиновым; устанавливаем некоторые свойства этих операторов; и, что наиболее важно, показываем, что расширенные стохастические интегралы, построенные с использованием вышеупомянутых обобщений СХР, совпадают.

Ключевые слова и фразы: процесс Леви, свойство хаотического разложения, расширенный стохастический интеграл, стохастическая производная Хиды.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.95

Лопушанський А.О.

РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФУЗІЙНО-ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В ПРАВИХ ЧАСТИНАХ

Лопушанський А.О. *Регулярність розв'язків крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 279–289.

Доведено однозначну розв'язність першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

з дробовою похідною $u_t^{(\beta)}$ Рімана-Ліувілля порядку $\beta \in (0,2)$, додатним гладким коефіцієнтом $a(t)$, узагальненими функціями в правих частинах та встановлено деякі достатні умови регулярності його розв'язку за змінною t.

Ключові слова і фрази: похідна дробового порядку, узагальнена функція, крайова задача, вектор-функція Гріна.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

Вступ

У даній статті встановлюємо однозначну розв'язність першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T], \tag{1}$$

з дробовою похідною $u_t^{(\beta)}$ Рімана-Ліувілля порядку $\beta \in (0,2)$, додатним гладким коефіцієнтом $a(t)$, узагальненими функціями в правих частинах та знаходимо деякі достатні умови регулярності розв'язку за змінною t.

Відомо [12], що узагальнені розв'язки рівнянь з частинними похідними та сталими коефіцієнтами у випадку правої частини $F(x,t) = F_0(x) \cdot \delta(t)$ ($\delta(t)$ — дельта-функція Дірака, крапкою позначено прямий добуток узагальнених функцій) є нескінченно диференційовними за змінною t в узагальненому сенсі: значення $(u(\cdot,t), \varphi(\cdot))$ розв'язку $u(x,t)$ на довільній основній функції $\varphi(x)$ є нескінченно диференційовною функцією змінної t.

На прикладі дифузійно-хвильового рівняння показуємо, що подібною властивістю володіють розв'язки крайових задач для рівнянь з дробовою похідною за змінною t: у випадку узагальненої функції $F(x,t) = F_0(x) \cdot g(t)$ регулярність за змінною t узагальненого розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1) визначається властивостями функцій

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55.

$a(t)$ та $g(t)$, зокрема, при неперервних $a(t)$ та $g(t)$ розв'язок $u(x,t)$ задачі також є узагальненою функцією, неперервною за змінною t.

Цей результат використовується для доведення розв'язності деяких обернених крайових задач для такого рівняння з заданими узагальненими функціями у правих частинах.

1 Основні позначення та формулювання задачі

Використовуємо такі позначення: $Q_0 = (0,l) \times (0,T]$, $C_+[0,T]$ — клас неперервних на $[0,T]$ та обмежених знизу додатним числом функцій, $C_+^\infty[0,T] = C^\infty[0,T] \cap C_+[0,T]$, $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ $(N=1,2)$, $\mathfrak{D}(0,l)$, $\mathfrak{D}[0,l]$ — простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в $\mathbb{R}^N$, $(0,l)$, $[0,l]$ [10, c. 13], $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0) = \{v \in C^\infty(\overline{Q}_0) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0, \quad k = 0,1,\dots\}$, $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathfrak{D}'(0,l)$, $\mathfrak{D}'[0,l]$, $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, $\mathfrak{D}(0,l)$, $\mathfrak{D}[0,l]$, $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$, (F,φ) — значення $F \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$ на основній функції $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, а також значення $F \in \mathfrak{D}'(0,l)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(0,l)$, $F \in \mathfrak{D}'[0,l]$ на $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$, $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$, $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T] = \{F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \mid (F(x,\cdot),\varphi(x)) \in C[0,T] \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,l)\}$ — клас узагальнених функцій із $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$, неперервних за змінною $t \in [0,T]$ [12].

Позначимо через $\widehat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ [10, c. 111], тобто $(g\widehat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi))$. Нехай $f * g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ — згортка узагальнених функцій $f, g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, що на кожну основну функцію $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ діє за правилом $(f*g,\varphi) = (f, g\widehat{*}\varphi)$; $f(x)\cdot g(t) \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$ — прямий добуток узагальнених функцій $f, g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, тобто узагальнена функція, що на кожну основну функцію $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ діє за правилом $(f\cdot g, \varphi) = (f(x), (g(t), \varphi(x,t)))$.

Зауважимо, що у випадку $g \in L_1(0,T)$ маємо

$$(f\cdot g,\varphi) = \Big(f(x), \int_0^T g(t)\varphi(x,t)dt\Big) = \int_0^T g(t)\big(f(x),\varphi(x,t)\big)dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2).$$

Використаємо функцію (див. [12]) $f_\lambda \in \mathfrak{D}'_+(\mathbb{R}) = \{f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \qquad \text{при} \quad \lambda > 0$$

і $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \le 0$, де $\Gamma(\lambda)$ — гама-функція, $\theta(t)$ — одинична функція Хевісайда. Правильні наступні співвідношення $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$, $f_\lambda \widehat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}$.

Нагадаємо, що похідну $v_t^{(\beta)}(x,t)$ Рімана-Ліувілля функції $v(x,t)$ порядку $\beta > 0$ визначають за формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t);$$

регуляризовану похідну дробового порядку [1],[2] за формулами:

$$D_t^\beta v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \frac{v_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau - \frac{u(x,0)}{t^\beta}\Big] = v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0), \qquad \text{при} \quad \beta \in (0,1),$$

$$D_t^\beta v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^t \frac{v_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}}d\tau = v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0) - f_{2-\beta}(t)v_t(x,0), \qquad \text{при} \quad \beta \in (1,2).$$

Нехай $C_{2,\beta}(Q_0) = \{v \in C(\bar{Q}_0) \mid v_{xx}, D_t^\beta v \in C(Q_0)\}$. Введемо оператори

$$L: \quad (Lv)(x,t) \equiv v_t^{(\beta)}(x,t) - a(t)v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \qquad v \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0),$$

$$L^{reg}: \quad (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\beta v(x,t) - a(t)v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in C_{2,\beta}(Q_0),$$

$$\widehat{L}: \quad (\widehat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}\widehat{*}v(x,t) - a(t)v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0),$$

та функційний простір

$$X(\overline{Q}_0) = \{v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0) : v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]\}.$$

Як у [9] показуємо, що для $v \in C^{2,\beta}(Q_0)$, $\psi \in X(\bar{Q}_0)$ правильна формула Ґріна

$$\int_{Q_0} v(y,\tau)(\widehat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau = \int_{Q_0}(L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau + \int_0^T a(\tau)\big[v(0,\tau)\psi_y(0,\tau) - v(l,\tau)\psi_y(l,\tau)\big]d\tau + \int_0^l v(y,0)dy\int_0^T f_{1-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau + \int_0^l v_\tau(y,0)dy\int_0^T f_{2-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau.$$

Розглянемо першу крайову задачу

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{4}$$

для рівняння (1) при $\beta \in (0,2)$ (умова (4) відсутня у випадку $\beta \in (0,1]$) за одного з наступних припущень:

(A) $a \in C_+^\infty[0,T]$, $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$, $F_j \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $j = 1,2$,

(B) $a \in C_+[0,T]$, $F(x,t) = F_0(x)\cdot g(t)$, $g \in C[0,T]$, $F_j \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $j = 0,1,2$.

Розв'язком задачі (1)–(4) за припущення (A) (або (B)) називається функція $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$, що задовольняє тотожність

$$(u, \widehat{L}\psi) = (F,\psi) + \sum_{j=1}^2 \Big(F_j, \int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt\Big) \qquad \forall\, \psi \in X(\bar{Q}_0). \tag{5}$$

2 Властивості спряжених операторів Ґріна

Означення. *Вектор-функція* $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y,\tau), G_2(x,t,y,\tau))$, *така що при достатньо гладких* g_0, g_1, g_2 *функція*

$$v(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy + \sum_{j=1}^2 \int_0^l G_j(x,t,y,0)g_j(y)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0, \tag{6}$$

є класичним (класу $C_{2,\beta}(Q_0)$*) розв'язком першої крайової задачі*

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = g_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T],$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad x \in [0,l], t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in [0,l],$$

називається вектор-функцією Ґріна цієї задачі.

З означення випливає, що

$(LG_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y, t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0;$

$G_j(0,t,y,\tau) = G_j(l,t,y,\tau) = 0, \quad y \in (0,l), t,\tau \in (0,T], j = 0,1,2;$

$G_1(x,0,y,0) = \delta(x-y), \quad \frac{\partial}{\partial t} G_2(x,0,y,0) = \delta(x-y), \quad x,y \in (0,l).$

Як при доведенні леми 1 із [9] показуємо, що

$$G_j(x,t,y,0) = f_{j-\beta}(t) * G_0(x,t,y,0), \quad (x,t) \in Q_0, \quad y \in (0,l), \quad j = 0,1,2. \tag{7}$$

Теорема 1. *При* $a \in C_+[0,T]$ *вектор-функція Гріна першої крайової задачі* (1)–(4) *існує.*

Доведення. Враховуючи формулу (7), достатньо довести існування головної функції Гріна $G_0(x,t,y,\tau)$. Як у [4], [7] для задачі Коші та у [5] для загальних параболічних крайових задач, її існування можна довести методом Леві, використовуючи відомий фундаментальний розв'язок даного рівняння зі сталим коефіцієнтом a [3].

Існування функції $G_0(x,t,y,\tau)$ можна також довести методом рядів Фур'є. Справді, вибираючи у формулі Гріна за функції $\psi_k \in X(\overline{Q}_0)$ розв'язки рівнянь

$$(\widehat{L}\psi_k)(y,t) = \varphi_k(x,t,y,\tau),$$

де послідовність $\varphi_k(x,t,y,\tau)$ $(k \to \infty)$ є дельта-видною, із формули Гріна після граничного переходу при $k \to \infty$ одержуємо зображення (6) розв'язку задачі (1)–(4), де $G_0(x,t,y,\tau)$ (границя послідовності ψ_k у $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$) як функція (y,τ) є розв'язком задачі

$$\begin{gathered}(\widehat{L}_{y,\tau}G_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0,\\ G_0(x,t,0,\tau) = G_0(x,t,l,\tau) = 0, \quad G_0(x,t,y,T) = G_{0\tau}(x,t,y,T) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Шукаємо G_0 у вигляді

$$G_0(x,t,y,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(x,t,\tau)\omega_m(y), \tag{9}$$

де $\omega_m(y)$ — ортонормовані власні функції стаціонарної крайової задачі

$$\omega_m'' + \lambda_m\omega_m = 0, \quad y \in (0,l), \quad \omega_m(0) = \omega_m(l) = 0.$$

Підставляючи (9) у рівняння задачі (8), матимемо

$$\sum_{m=1}^{\infty} [f_{-\beta}(\tau)\widehat{*}S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a(\tau)S_m(x,t,\tau)]\omega_m(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (\delta(x-y),\omega_m(y))\omega_m(y)\delta(t-\tau),$$

звідки, враховуючи, що $(\delta(x-y),\omega_m(y)) = \omega_m(x)$, одержуємо задачі для $S_m(x,t,\tau)$:

$$\begin{gathered}f_{-\beta}(\tau)\widehat{*}S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a(\tau)S_m(x,t,\tau) = \omega_m(x)\delta(t-\tau),\\ S_m(x,t,T) = S_{m\tau}(x,t,T) = 0, \quad m = 1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{10}$$

Кожна з задач (10) зводиться до лінійного інтегрального рівняння

$$S_m(x,t,\tau) + \lambda_m f_\beta(\tau)\widehat{*}(a(\tau)S_m(x,t,\tau)) = f_\beta(t-\tau)\omega_m(x). \tag{11}$$

Методом послідовних наближень знаходимо його розв'язок у вигляді рівномірно збіжного при $x \in [0,l]$, $0 \le \tau < t \le T$, ряду

$$S_m(x,t,\tau) = \Big[f_\beta(t-\tau) + \sum_{p=0}^{\infty}(-\lambda_m)^p \underbrace{f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(\ldots a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)}_{p}f_\beta(t-\tau)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big]\omega_m(x).$$

Зокрема, у випадку $a(\tau) = a = const > 0$ матимемо

$$\begin{aligned}S_m(x,t,\tau) &= \sum_{p=0}^{\infty}(-a\lambda_m)^p f_{(p+1)\beta}(t-\tau)\omega_m(x)\\ &= (t-\tau)^{\beta-1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[-a\lambda_m(t-\tau)^\beta]^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}\omega_m(x) = (t-\tau)^{\beta-1}E_\beta\big(-a\lambda_m(t-\tau)^\beta\big)\omega_m(x),\end{aligned}$$

де $E_\beta(z) = E_{\beta^{-1}}(z,\beta) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}$ — функція Міттаг-Лефлера [2], що при великих $|z|$ має оцінку $E_\beta(z) \le \frac{C}{|z|}$, $C = C(\beta)$ — деяка додатна стала. Тоді збіжність ряду (9) випливає з рівномірної збіжності ряду

$$\frac{C}{a(t-\tau)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\omega_m(x)\omega_m(y)|}{\lambda_m}, \quad x,y \in [0,l], \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

В загальному випадку, при $a_0 \le a(t) \le A_0$ для всіх $t \in [0,T]$ оцінюємо у виразі для $S_m(x,t,\tau)$ суму двох сусідніх доданків:

$$\begin{aligned}&\lambda_m^{2k}\underbrace{f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)}_{2k}f_\beta(t-\tau)\Big)\Big)\Big)\Big)\\ &\quad - \lambda_m^{2k+1}\underbrace{f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)}_{2k+1}f_\beta(t-\tau)\Big)\Big)\Big)\Big)\\ &\le \lambda_m^{2k}\Big[A_0^{2k}f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m a_0^{2k+1}f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]\\ &\le \lambda_m^{2k}\Big[c^{2k}f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m c^{2k+1}f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]\end{aligned}$$

при деякому $c < a_0$ та всіх $\lambda_m \ge \frac{A_0^{2k}-c^{2k}}{a_0^{2k+1}-c^{2k+1}} \cdot \frac{f_{(2k+1)\beta}(t-\tau)}{f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)} = \frac{A_0^{2k}-c^{2k}}{a_0^{2k+1}-c^{2k+1}} \cdot \frac{\Gamma(2k\beta+2\beta)}{\Gamma(2k\beta+\beta)(t-\tau)^\beta}$. Зауважимо, що згідно з [11, с. 67] $\frac{\Gamma(2k\beta+2\beta)}{\Gamma(2k\beta+\beta)} = O((2k\beta)^\beta)$ для великих k. Тоді при великих $\lambda_m(t-\tau)^\beta$ матимемо

$$|S_m(x,t,\tau)| \le (t-\tau)^{\beta-1}E_\beta(-c\lambda_m(t-\tau)^\beta)|\omega_m(x)|, \quad x \in [0,l], \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

Отже, при $a \in C_+[0,T]$ матимемо аналогічну до випадку сталої функції a оцінку розв'язку рівняння (11) при великих $\lambda_m(t-\tau)^\beta$, а звідси рівномірну при $x,y \in [0,l]$, $0 \le \tau < t \le T$, збіжність ряду (9). Головна функція Гріна задачі (1)–(4) існує. □

Наслідок 1. *Правильні оцінки*

$$|G_i(x,t+\Delta t,y,\tau,a) - G_i(x,t,y,\tau,a)| \le M_i(x,t,y,\tau,a)|\Delta t|^\gamma, \quad (x,t),(y,\tau) \in \overline{Q}_0, \tag{12}$$

де $0 < \gamma < 1$, *невід'ємні функції* $M_i(x,t,y,\tau,a)$ *мають такі ж оцінки, як* $G_i(x,t,y,\tau,a)$, $i = 0,1,2$, *відповідно із заміною* β *на* $\beta - \gamma$.

Доведення. Використовуючи зображення (9), матимемо

$$G_0(x,t+\Delta t,y,\tau,a) - G_0(x,t,y,\tau,a) = \sum_{m=1}^{\infty}[S_m(x,t+\Delta t,\tau,a) - S_m(x,t,\tau,a)]\omega_m(y). \tag{13}$$

Для функцій $Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a) = S_m(x,t+\Delta t,\tau,a) - S_m(x,t,\tau,a)$ одержуємо інтегральні рівняння

$$Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a) + \lambda_m f_\beta(\tau)\widehat{*}(a(\tau)Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a)) = [f_\beta(t+\Delta t-\tau) - f_\beta(t-\tau)]\omega_m(x)$$

вигляду (11). Оскільки $f_\beta(t+\Delta t-\tau) - f_\beta(t-\tau) = f_{-\lambda}(t) * [f_{\beta+\lambda}(t+\Delta t-\tau) - f_{\beta+\lambda}(t-\tau)]$, при $1-\beta < \lambda < 1$, якщо $\beta \in (0,1)$, та $\lambda < 2-\beta$, якщо $\beta \in (1,2)$, маємо $\beta+\lambda-1 = \gamma \in (0,1)$ та $\beta - \gamma = 1-\lambda > 0$, то враховуючи нерівність

$$|(t+\Delta t-\tau)^\gamma - (t-\tau)^\gamma| = (t-\tau)^\gamma\left|\left(1+\frac{\Delta t}{t-\tau}\right)^\gamma - 1\right| \le |\Delta t|^\gamma,$$

одержуємо

$$|f_\beta(t+\Delta t-\tau) - f_\beta(t-\tau)| \le f_{1-\lambda}(t-\tau)|\Delta t|^\gamma = f_{\beta-\gamma}(t-\tau)|\Delta t|^\gamma.$$

Як в доведенні теореми 1 знаходимо функції $Z_m(x,t,y,\tau,\Delta t,a)$, що матимуть такі ж оцінки, як розв'язки рівнянь (11) із заміною β на $\beta-\gamma$ та множником $|\Delta t|^\gamma$. Враховуючи зображення (13), одержуємо оцінку (12) при $j=0$. Інші оцінки в наслідку одержуємо з таких самих міркувань та враховуючи співвідношення (7). □

Використовуватимемо надалі позначення $G_j(x,t,y,\tau,a)$ замість $G_j(x,t,y,\tau)$, $j=0,1,2$. Згідно з методом Леві, для функцій $G_0(x,t,y,\tau,a)$ та $G_j(x,t,y,0,a)$ правильні такі ж оцінки, як для параметриксів $G(x-y,t-\tau,a(\tau))$, $f_{j-\beta}(t) * G(x-y,t,0,a(0))$, $j=1,2$, відповідно [4], [7], [8].

Згідно з [3], фундаментальна функція $G(x,t,a)$ оператора L зі сталим коефіцієнтом $a>0$ має вигляд

$$G(x,t,a) = \frac{\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|x|}H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\middle|\begin{matrix}(\beta,\beta) & \\ (1,1) & (1/2,1)\end{matrix}\right),$$

де $H^{m,n}_{p,q}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \ldots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \ldots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$ — H-функція Фокса [6].

Використовуючи властивості H-функцій Фокса (як у [9]), метод Леві та враховуючи результати [13], знаходимо оцінки для компонент вектор-функції Ґріна та їх похідних. При $[a(t)]^{-1} \le R$ для всіх $t \in [0,T]$ матимемо

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\right| \le C^*_k R^{\frac{k+1}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta(1-k)}{2}-1}, \quad |x-y|^2 < 4(t-\tau)^\beta/R,$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\right| \le \frac{C_k(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^{k+1}}, \quad |x-y|^2 > 4(t-\tau)^\beta/R, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k G_j(x,t,y,0,a)\right| \le C^*_{jk} R^{\frac{k+1}{2}} t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}}, \qquad |x-y|^2 < 4t^\beta/R,$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k G_j(x,t,y,0,a)\right| \le \frac{\widehat{C}_{jk}t^{j-1}}{|x-y|}\left(\frac{R|x-y|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1-j+k+\frac{1}{2}}{2-\beta}} e^{-c\left(\frac{R|x-y|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le C_{jk}R^{-\frac{1}{2-\beta}}|x-y|^{-1-\frac{2}{2-\beta}}t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}},$$

$$|x-y|^2 > 4t^\beta/R, \quad j=1,2, \qquad c = (2-\beta)\beta^{\beta(2-\beta)},$$

$C_k, C^*_k, C_{jk}, C^*_{jk}, \hat{C}_{jk}$ $(j=1,2,\ k=0,1,2,\ldots)$ — деякі додатні сталі.

Використовуватимемо спряжені оператори Ґріна

$$(\widehat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int_\tau^T dt\int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x,t)dx,$$
$$(\widehat{\mathfrak{G}}_j\varphi)(y) = \int_0^T dt\int_0^l G_j(x,t,y,0,a)\varphi(x,t)dx, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\bar{Q}_0), \quad j=1,2.$$

Як у [9] доводимо, що для кожної $\psi \in X(\bar{Q}_0)$

$$(\widehat{\mathfrak{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau) = \psi(y,t), \quad (y,t) \in \bar{Q}_0,$$

$$(\widehat{\mathfrak{G}}_j(\widehat{L}\psi))(y) = \int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y,t)dt, \quad y \in [0,l], \quad j=1,2, \tag{14}$$

а при $a \in C^\infty_+[0,T]$

$$\widehat{\mathfrak{G}}_0 : \mathfrak{D}(\bar{Q}_0) \to X(\bar{Q}_0), \qquad \widehat{\mathfrak{G}}_j : \mathfrak{D}(\bar{Q}_0) \to C^\infty[0,l], \quad j=1,2. \tag{15}$$

Теорема 2. *За припущення (A) існує єдиний розв'язок $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ першої крайової задачі (1)–(4). Розв'язок визначений за формулою*

$$(u,\varphi) = (F,\widehat{\mathfrak{G}}_0\varphi) + \sum_{j=1}^2 (F_j,\widehat{\mathfrak{G}}_j\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\bar{Q}_0). \tag{16}$$

Теорема доводиться за схемою доведення теореми 1 у [9] із використанням наведених вище властивостей (14) та (15) спряжених операторів Ґріна.

Введемо оператори

$$(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau) = \int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx,$$
$$(\widehat{G}_j\varphi)(y,t) = \int_0^l G_j(x,t,y,0,a)\varphi(x)dx, \quad j=1,2, \quad \varphi \in \mathfrak{D}[0,l].$$

Лема 1. *Нехай $a \in C_+[0,T]$. Тоді при $\max\limits_{t\in[0,T]}[a(t)]^{-1} \le R$, довільних $0 \le \tau < t \le T$ правильні оцінки*

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)\right| &\le c_0\|\varphi\|_{C^k[0,l]}\cdot(t-\tau)^{\beta/2-1}[\sqrt{R}+(t-\tau)^{\beta/2}],\\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)\right| &\le c_j\|\varphi\|_{C^k[0,l]}\cdot t^{j-1}, \quad j=1,2, \quad k=0,1,2,\ldots,\end{aligned} \tag{17}$$

а також

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)\right| &\le c^*_0\sqrt{R}\|\varphi\|_{C^{k-1}[0,l]}\cdot(t-\tau)^{\beta/2-1},\\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)\right| &\le c^*_j\|\varphi\|_{C^{k-1}[0,l]}\cdot[\sqrt{R}t^{j-1-\beta/2}+t^{j-1}], \quad j=1,2, \quad k=1,2,\ldots,\end{aligned} \tag{18}$$

c_j, c^*_j $(j=0,1,2)$ — додатні сталі.

Доведення. Використовуючи оцінки головної функції Гріна, при $\varphi \in C[0,l]$ для всіх $t \in [0,T]$ знаходимо

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx\Big| \\
&\le \Big(\int_{|x-y|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} \Big|G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|dx + \int_{|x-y|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} \Big|G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|dx\Big) \cdot \|\varphi\|_{C[0,l])} \\
&\le \Big(\int_{|x-y|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} C_0^* R^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}dx + \int_{|x-y|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} \frac{C_0(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|}dx\Big) \cdot \|\varphi\|_{C[0,l]} \\
&\le \big(2C_0^*(t-\tau)^{\beta-1} + l\frac{C_0}{2}\sqrt{R}(t-\tau)^{\beta/2-1}\big)\|\varphi\|_{C[0,l]} \le c_0\|\varphi\|_{C[0,l]} \cdot (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}[\sqrt{R} + (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}}],
\end{aligned}
$$

$c_0 = const > 0$ і при $\varphi \in C[0,l]$ для всіх $(y,\tau) \in \overline{Q}_0$, $t \in [0,T]$ функції $(G_0\varphi)(y,t,\tau)$ ($y \in [0,l]$, $0 \le \tau < t \le T$) є неперервними.

Оскільки $\Big|\int_0^l \frac{\partial}{\partial y}G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx\Big| = \Big|\int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi'(x)dx\Big|$ при $\varphi \in C^1[0,l]$, то з попередньої оцінки одержуємо

$$
\Big|\frac{\partial}{\partial y}\int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx\Big| \le c_0\|\varphi\|_{C^1[0,l]} \cdot (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}[\sqrt{R} + (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}}], \tag{19}
$$

і при $\varphi \in C^1[0,l]$ для всіх $(y,\tau) \in \overline{Q}_0$, $t \in [0,T]$ функції $\frac{\partial}{\partial y}(G_0\varphi)(y,t,\tau)$ ($y \in [0,l]$, $0 \le \tau < t \le T$) є неперервними.

З іншого боку, застосовуючи оцінку похідної функції $G_0(x,t,y,\tau,a)$, при $\varphi \in C[0,l]$ для всіх $t \in [0,T]$ матимемо

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_0^l \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx\Big| \\
&\le \Big(\int_{|x-y|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} C_1^* R(t-\tau)^{-1}dx + \int_{|x-y|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} \frac{C_1(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^2}dx\Big) \cdot \|\varphi\|_{C[0,l]} \\
&\le c_0^*\sqrt{R}\|\varphi\|_{C[0,l]} \cdot (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}, \quad c_0^* = const > 0.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Із оцінок (19) та (20) за допомогою інтегрування частинами знаходимо відповідно оцінки (17) та (18) для $\widehat{G}_0\varphi$.

При $\varphi \in C[0,l]$, $j = 1,2$, оцінимо

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_0^l \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k G_j(x,t,y,0,a)\varphi(x)dx\Big| &\le \Big[\int_{y-\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}^{y+\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}} C_{jk}^* R^{\frac{k+1}{2}} t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}}dx \\
&+ \int_{|x-y|>\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}} \frac{C_{jk}t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}}}{R^{\frac{1}{2-\beta}}|y-x|^{1+\frac{2}{2-\beta}}}dx\Big] \cdot \|\varphi\|_{C[0,l]} \le c_{jk}^*[\sqrt{R}^k t^{j-1-\frac{k\beta}{2}} + t^{j-1}] \cdot \|\varphi\|_{C[0,l]},
\end{aligned}
$$

$c_{jk}^* = const > 0$, $k = 0,1,2,\ldots$, а, отже, при $\varphi \in C[0,l]$ функції $(G_j\varphi)(y,\tau)$ неперервні в $\overline{Q}_0$, $j = 1,2$.

Використовуючи одержані оцінки при $k = 0$ ($k = 1$) та інтегрування частинами, як вище, знаходимо оцінки (17) (відповідно (18)) для випадку $j = 1,2$. □

Теорема 3. *За припущення (B) існує єдиний розв'язок $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$ першої крайової задачі* (1)–(4), *він визначений за формулою*

$$
(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)) = \int_0^t g(\tau)(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau))d\tau + \sum_{j=1}^2 (F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t,\tau)) \qquad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}[0,l], \quad t \in [0,T]. \tag{21}
$$

Доведення. Тепер $F(x,t) = F_0(x) \cdot g(t)$ — прямий добуток узагальнених функцій $F_0 \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $g \in C[0,T]$. Ясно, що така узагальнена функція належить $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ (навіть $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$, оскільки для $g \in C[0,T]$ та довільної $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$ функція $(F_0(x) \cdot g(t), \varphi(x)) = (F_0,\varphi)g(t)$ є неперервною на $[0,T]$). Тому за теоремою 2 при $a \in C_+^\infty[0,T]$ існує єдиний розв'язок $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ першої крайової задачі (1)–(4), визначений за формулою (16). Покажемо існування розв'язку $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$ цієї задачі за припущення (B) та що для нього правильне зображення (21).

Узагальнені функції в обмеженій області мають скінченний порядок сингулярності [10]: існують такі цілі числа k_0, k_1, k_2 та функції $g_{0k}, g_{1k}, g_{2k} \in L_1(0,l)$, що

$$
(F_j(y),\varphi(y)) = \sum_{k=0}^{k_j}\int_0^l g_{jk}(y)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k\varphi(y)dy \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}[0,l], \quad j = 0,1,2. \tag{22}
$$

Використовуючи зображення (22) та лему 1, переконуємося, що для довільної $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$ функції у правій частині формули (21)

$$
\int_0^t g(\tau)(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau))d\tau = \sum_{k=0}^{k_0}\int_0^t g(\tau)\Big[\int_0^l g_{0k}(y)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)dy\Big]d\tau,
$$

$$
(F_j(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t)) = \sum_{k=0}^{k_j}\int_0^l g_{jk}(y)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k(\widehat{G_j}\varphi)(y,t)dy, \quad j = 1,2,
$$

неперервні на $[0,T]$, та правильні оцінки

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_0^t g(\tau)(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau))d\tau\Big| \\
&\le c_0\sum_{k=0}^{k_0}\|\varphi\|_{C^k[0,l]} \cdot \int_0^t |g(\tau)|\Big[\int_0^l |g_{0k}(y)|dy\Big]\Big[(t-\tau)^{\beta-1} + \sqrt{R}(t-\tau)^{\beta/2-1}\Big]d\tau \le b_0 t^{\beta/2},
\end{aligned}
$$

$$
|(F_j(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t))| \le c_j\sum_{k=0}^{k_j}\|\varphi\|_{C^k[0,l]} \cdot t^{j-1}\int_0^l |g_{jk}(y)|dy = b_j t^{j-1}, \quad j = 1,2,
$$

b_j ($j = 0,1,2$) — деякі додатні сталі. Отже, права частина у формулі (21) визначена та функція (21) неперервна за змінною $t \in [0,T]$.

Покажемо, що функція (21) задовольняє тотожність (5). За лемою 1 при довільних $0 \le \tau < t \le T$, $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$, маємо $(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t,\tau) \in \mathfrak{D}[0,l]$, а також $(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(\cdot,t,\tau) \in \mathfrak{D}[0,l]$ для кожної $\psi \in X(\overline{Q}_0)$, та визначено $(u,\widehat{L}\psi) = \int_0^T (u(\cdot,t),(\widehat{L}\psi)(\cdot,t))dt$. Згідно з формулою (21),

$$\int_0^T (u(\cdot,t),(\widehat{L}\psi)(\cdot,t))dt$$
$$= \int_0^T \Big(\int_0^t g(\tau)(F_0(y),(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau))d\tau \Big)dt + \sum_{j=1}^2 \int_0^T (F_j(y),(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau))dt$$
$$= \Big(F_0(y), \int_0^T \Big(\int_0^t g(\tau)(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)d\tau \Big)dt\Big) + \sum_{j=1}^2 \int_0^T (F_j(y),(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau))dt$$
$$= \Big(F_0(y), \int_0^T g(\tau)\Big(\int_\tau^T \widehat{G}_0(\widehat{L}\psi)(y,t,\tau)dt \Big)d\tau\Big) + \sum_{j=1}^2 \Big(F_j(y), \int_0^T (\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)dt\Big)$$
$$= (F_0(y)\cdot g(\tau),(\widehat{\mathfrak{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau)) + \sum_{j=1}^2 (F_j,\widehat{\mathfrak{G}}_j(\widehat{L}\psi)).$$

Скориставшись формулами (14) (правильними при $a \in C_+[0,T]$), одержуємо

$$(u,\widehat{L}\psi) = (F_0(y)\cdot g(\tau),\psi(y,\tau)) + \sum_{j=1}^2 \Big(F_j, \int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt\Big) \qquad \forall\ \psi \in X(\overline{Q}_0),$$

тобто тотожність (5). За означенням функція (21) є розв'язком задачі (1)–(4) шуканого класу. Єдиність розв'язку задачі доводиться як у [9]. □

Наслідок 2. *За умов теореми 3 також усі похідні* $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u$, $k = 1,2,\ldots$, *розв'язку задачі неперервні за змінною* $t \in [0,T]$: $(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x,\cdot),\varphi(x)) \in C[0,T]$ *для кожної* $\varphi \in \mathfrak{D}(0,l)$.

Зауваження 1. *Для рівняння (1) з загальнішим вільним членом — узагальненою функцією* $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$ *(замість* $F_0\cdot g$*), при* $F_j \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $j = 1,2$, *та навіть* $a \in C_+^\infty[0,T]$ *таким способом не можемо довести, що розв'язок задачі (1)–(4) належить* $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$. *Справді, тепер використовуємо зображення*

$$(F(y,\tau),\varphi(y,\tau)) = \sum_{k=0}^{K_0}\sum_{p=0}^{P_0} \int_0^T d\tau \int_0^l g_{0kp}(y,\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k\Big(\frac{\partial}{\partial \tau}\Big)^p \varphi(y,\tau)dy \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$$

із деякими $g_{0kp} \in L_1(\overline{Q}_0)$, $k = 0,\ldots,K_0$, $p = 0,\ldots,P_0$. *Однак при* $P_0 > 0$ *та* $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$ *функції* $\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^p(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)$ *мають загалом неінтегровні особливості.*

Зауваження 2. *Розглянуто задачі в одновимірному просторовому випадку. Результати поширюються на випадок* $Q_0 = \Omega \times (0,T]$, *де* Ω *— обмежена область в* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

References

[1] Caputo M. *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent–II*. Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967, **13**, 529–539. doi:10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x

[2] Djrbashian M. M. Integral transformations and representations of functions in complex domain. Nauka, Moscow, 1999. (in Russian)

[3] Sheng D. J. *Time- and space-fractional partial differential equations*. J. Math. Phys. 2005, **46** (1), 13504–13511. doi:10.1063/1.1819524

[4] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[5] Ivasyshen S.D. Green matrices of parabolic boundary value problems. Vyshcha shkola, Kyiv, 1990. (in Russian)

[6] Kilbas A.A., Saigo M. H-Transforms: theory and applications. In: Prudnikov A.P., Dunkl C.F., Glaeske H.-J., Saigo M. (Eds.) Analytical Methods and Special Functions, **9**. Chapman and Hall/CRC, London-Washington, 2004.

[7] Kochubei A.N. *Fractional-order diffusion*. Differential Equations 1990, **26**, 485–492. (in Russian)

[8] Kochubei A.N., Eidelman S.D. *Equations of one-dimensional fractional-order diffusion*. Dop. NAS of Ukraine 2003, **12**, 11–16. (in Russian)

[9] Lopushans'ka H.P., Lopushans'kyi A.O. *Space–time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions*. Ukrainian Math. J. 2013, **64** (8), 1215-1230. doi:10.1007/s11253-013-0711-z (translation of Ukr. Mat. Zhurn. 2012, **64** (8), 1067–1079)

[10] Shilov G.E. Mathematical Analysis. Nauka, Moscow, 1965. (in Russian)

[11] Titchmarsh E. The Theory of Functions. Oxford University Press, USA, 1976.

[12] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. Nauka, Moskow, 1981. (in Russian)

[13] Voroshylov A.A., Kilbas A.A. *Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative*. Dokl. Ak. Nauk 2007, **414** (4), 1–4. (in Russian)

Надійшло 18.09.2013

Lopushanskyj A.O. *Regularity of the solutions of the boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 279–289.

We prove the unique solvability of the first boundary value problem of equation

$$u_t^{(\beta)} - a(t)\Delta u = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

with Riemann-Liouville fractional derivative $u_t^{(\beta)}$ of the order $\beta \in (0,2)$, positive smooth coefficient $a(t)$ and generalized functions in right-hand sides. We obtain some sufficient conditions of the regularity of its solution as variable t.

Key words and phrases: fractional derivative, generalized function, boundary value problem, Green vector-function.

Лопушанский А.О. *Регулярность решений краевых задач для диффузионно-волнового уравнения с обобщенными функциями в правых частях* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 279–289.

Доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи для уравнения

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

с дробной производной $u_t^{(\beta)}$ Римана-Лиувилля порядка $\beta \in (0,2)$, положительным гладким коэффициентом $a(t)$, обобщенными функциями в правых частях и установлено некоторые достаточные условия регулярности ее решения по переменной t.

Ключевые слова и фразы: производная дробного порядка, обобщенная функция, краевая задача, вектор-функция Грина.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.956.4

Малицька Г.П., Буртняк І.В.

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ ІНТЕГРАЛА ПУАССОНА УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Малицька Г.П., Буртняк І.В. *Про стабілізацію інтеграла Пуассона ультрапараболічних рівнянь* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 290–297.

Досліджується стабілізація інтеграла Пуассона для рівнянь типу Колмогорова, що мають три групи змінних, за якими є виродження параболічності.

Ключові слова і фрази: ультрапараболічні рівняння, рівняння Колмогорова, стабілізація, інтеграл Пуассона.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: bvanya@meta.ua (Буртняк І.В.)

Вступ

Вироджені параболічні рівняння порядку $2b$, які узагальнюють рівняння дифузії з інерцією і мають довільну скінченну кількість груп змінних, за якими є виродження параболічності, досліджено в [3, 5], і для них побудовано фундаментальний розв'язок (ф.р.) задачі Коші. З використанням властивостей ф.р. встановлено достатні та необхідні умови точкової і рівномірної стабілізації інтеграла Пуассона для цих рівнянь. Зокрема, розглянуто випадки, коли початкова функція має граничне середнє по областях, які визначаються лініями рівня ф.р. задачі Коші. Для рівняння високого порядку початкова функція має граничне середнє по паралелепіпедах. Одержані результати узагальнено результатами робіт [2, 6]. Вони можуть бути застосовані в теорії стохастичних процесів [1]. Ці результати можна узагальнити на випадок рівнянь із змінними коефіцієнтами в параболічній частині, а також на системи рівнянь типу Колмогорова [4].

Введемо позначення: n — деяке фіксоване натуральне число; m_1, m_2, m_3 — фіксовані цілі невід'ємні числа; $n \geq m_1 \geq m_2 \geq m_3$; $N = n + \sum_{j=1}^{3} m_j$; $X = (x, y_1, y_2, y_3)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $j = 1,2,3$; $y_j = (y_{j,1}, y_{j,2}, \dots, y_{j,m_j})$, $N_1 = n + \sum_{j=1}^{3}(2j+1)m_j$, $x^{(j)} = (x_1, x_2, \dots, x_{m_j})$, $y_j^{(s)} = (y_{j,1}, y_{j,2}, \dots, y_{j,m_s})$, $j < s$, $X \in \mathbb{R}^{N_1}$; аналогічно $\Xi = (\zeta, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\eta_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $j = 1,2,3$; $(x^{(1)}, D_{y_1}) = \sum_{j=1}^{m_1} x_i D_{y_{1j}}$, $(y_{s-1}^{(s)}, D_{y_s}) = \sum_{j=1}^{m_s} y_{s-1} D_{y_{sj}}$, $s = 2,3$, $\Delta_x = \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2$.

Розглянемо задачу Коші

$$(D_t - (x^{(1)}, D_{y_1}) - (y_1^{(2)}, D_{y_2}) - (y_2^{(3)}, D_{y_3}) - a\Delta_x)u(t,x) = 0, \tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.

$$u(t,x)|_{t=\tau} = u_0(X), \quad X \in \mathbb{R}^N, t > \tau \geq 0, a > 0, \tag{2}$$

де $u_0(X)$ — вимірна обмежена функція в $\mathbb{R}^N$. Ф.р. задачі (1), (2) має вигляд ([3])

$$Z(t,X;\tau,\Xi) = 12^{m_1/2} 720^{m_2/2} 25200^{m_3/2} (4\pi a)^{-N/2} (t-\tau)^{-N_1/2} exp\left\{\frac{-\rho(t,X;\tau,\Xi)}{a}\right\},$$

де

$$\begin{aligned}\rho(t,X;\tau,\Xi) = {} & |x-\zeta|^2(t-\tau)^{-1} + 3(t-\tau)^{-3}|y_1 - \eta_1 + (x^{(1)} + \zeta^{(1)})2^{-1}(t-\tau)|^2 \\ & +180(t-\tau)^{-5}|y_2 - \eta_2 + (y_1^{(2)} + \eta_1^{(2)})2^{-1}(t-\tau) + (x^{(2)} - \zeta^{(2)})12^{-1}(t-\tau)^2|^2 \\ & +630(t-\tau)^{-7}|y_3 - \eta_3 + (y_2^{(3)} + \eta_2^{(3)})2^{-1}(t-\tau) + (y_1^{(3)} - \eta_1^{(3)})10^{-1}(t-\tau)^2 \\ & +(x^{(3)} + \zeta^{(3)})120^{-1}(t-\tau)^3|^2,\end{aligned}$$

$\rho(t,X;0,\Xi) = r^2$ — сім'я поверхонь рівня ф.р. задачі (1), (2).

Через $F_{r,t}^{X_0}$ позначимо тіло, обмежене еліпсоїдом

$$\rho(t,X;0,\Xi) = r^2, \tag{3}$$

де Ξ — змінна точка, а через v_N — об'єм тіла, обмеженого поверхнею

$$|\zeta|^2 + |\eta_1 - \sqrt{3}\zeta^{(1)}|^2 + |\eta_2 - \sqrt{15}\eta_1^{(2)} - \sqrt{5}\zeta^{(2)}|^2 + |\eta_3 - 2^{-1}\sqrt{35}\eta_2^{(3)} + \sqrt{21}\eta_1^{(3)} + 2^{-1}\sqrt{7}\zeta^{(3)}|^2 = 1.$$

Нехай $M_t^X(r)$ — середнє $u_0(x)$ по тілах $F_{r,t}^X$, обмежених поверхнями (3). Будемо казати, що функція $u_0(X)$ має *граничне середнє* $M^X(r)$ по тілах $F_{r,t}^X$, якщо існує границя $\lim_{t\to\infty} M_t^X(r) = M^X(r)$.

1 Точкова стабілізація інтеграла Пуассона задачі Коші (1), (2)

Теорема 1. *Якщо $u_0(X)$ має граничне середнє по еліпсоїдах $F_{r,t}^X$, яке майже при всіх r дорівнює $M^X(r)$, то інтеграл Пуассона рівняння* (1) *стабілізується (прямує при $t \to \infty$) до числа*

$$\iota = (2\pi a)^{-N/2} v_N \int_0^{+\infty} r^{N+1} e^{-r^2} M^X(r) dr.$$

Доведення. Розглянемо інтеграл Пуассона для рівняння (1)

$$u(t,X) = \int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;0,\Xi) u_0(\Xi) d\Xi. \tag{4}$$

Введемо заміну змінних інтегрування: $x - \zeta = -2\sqrt{at}\alpha$; $y_1 - \eta_1 + x^{(1)}t = -\sqrt{t^3 a}\beta_1/\sqrt{3}$; $y_2 - \eta_2 + y_1^{(2)}t + x^{(2)}t^2/2 = -\sqrt{t^5 a}\beta_2/6\sqrt{5}$; $y_3 - \eta_3 + y_1^{(3)}t/2 + y_2^{(3)}t^2 + x^{(3)}t^3/6 = -\sqrt{t^7 a}\beta_3/30\sqrt{7}$. Тоді (4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} u(t,X) = \pi^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} exp\Big\{ & -|\alpha|^2 - |\beta_1 - \sqrt{3}\alpha^{(1)}|^2 - |\beta_2 - \sqrt{15}\beta_1^{(2)} - \sqrt{5}\alpha^{(2)}|^2 \\ & -|\beta_3 - \sqrt{35}\beta_2^{(3)}/2 + \sqrt{21}\beta_1^{(3)} + \sqrt{7}\alpha^{(3)}/2|^2\Big\} u_0\Big(t,\, x + 2\sqrt{at}\alpha,\, y_1 + x^{(1)}t + \sqrt{at^3}\beta_1/\sqrt{3}, \\ & y_2 + y_1^{(2)}t + x^{(2)}t^2/2 + \sqrt{at^5}\beta_2/6\sqrt{5},\, y_3 + y_1^{(3)}t/2 + y_2^{(3)}t^2 + x^{(3)}t^3/6 + \sqrt{at^7}\beta_3/30\sqrt{7}\Big) dE, \\ & E = (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \qquad E \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{5}$$

Розглянемо додатно визначену квадратичну форму

$$|\alpha|^2 + |\beta_1 - \sqrt{3}\alpha^{(1)}|^2 + |\beta_2 - \sqrt{15}\beta_1^{(2)} - \sqrt{5}\alpha^{(2)}|^2 + |\beta_3 - \sqrt{35}\beta_2^{(3)}/2 + \sqrt{21}\beta_1^{(3)} + \sqrt{7}\alpha^{(3)}/2|^2 = \sum_{(i,j,k,s)} C_{ijks}\alpha^i\beta_1^j\beta_2^k\beta_3^s, \quad (6)$$

де $(i,j,k,s) = |i| + |j| + |k| + |s| = 2$, і відповідну до (6) сім'ю еліпсоїдів, що не перетинаються: $\sum_{(i,j,k,s)} C_{ijks}\alpha^i\beta_1^j\beta_2^k\beta_3^s = r^2$. В інтегралі (5) перейдемо до нових змінних інтегрування

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r\Phi(\Psi)\cos\Psi_1, \\ \alpha_2 &= r\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\cos\Psi_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{3m_3} &= r\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\sin\Psi_2\dots\cos\Psi_{N-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\Psi = (\Psi_1 ... \Psi_{N-1})$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \Psi_j \le \pi$, $j = 1, \dots, N-2$, $0 \le \Psi_{N-1} \le 2\pi$, а функція $\Phi(\Psi)$ визначається рівністю

$$\Phi^2(\Psi)\sum_{(i,j,k,s)} C_{ijks}\alpha'^i\beta_1'^j\beta_2'^k\beta_3'^s = 1$$

з $\alpha_1' = \cos\Psi_1$, $\alpha_2' = \sin\Psi_1\cos\Psi_2, \dots, \beta_{3m_3}' = \sin\Psi_1\sin\Psi_2\dots\sin\Psi_{N-1}$. Якобіан перетворення (7) має вигляд $J = r^{N-1}J_1$, де $J_1 = \Phi^N(\Psi)\sin^{N-2}\sin^{N-3}\Psi_2\dots\sin\Psi_{N-1}$.

Позначимо

$$\begin{aligned} u_0(t,r,\Psi,X) = u_0\Big(&2r\sqrt{ta}\Phi(\Psi)\cos\Psi_1 + x_1, \dots, \\ &r\sqrt{at^3}(30\sqrt{7})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\dots\cos\Psi_{n+1} + y_{11} + x_1 t, \dots, \\ &r\sqrt{at^5}(6\sqrt{5})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\dots\cos\Psi_{n+m_1+1} + y_{21} + y_{11}t + 2^{-1}x_1t^2, \dots, \\ &r\sqrt{at^7}(30\sqrt{7})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\dots\sin\Psi_{N-1} + y_{3m_3} + y_{2m_3}t + 2^{-1}y_{1m_3}t^2 + 6^{-1}x_{m_3}t^3\Big). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(t,X) &= \pi^{-N/2}\int_0^{+\infty} r^{N-1}e^{-r^2}dr\int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)J_1 d\Psi \\ &= \pi^{-N/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^r \rho^{N-1}d\rho\int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)J_1 d\Psi dr \\ &= 2\pi^{-N/2}\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\int_0^r \rho^{N-1}d\rho\int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)J_1 d\Psi dr, \end{aligned}$$

де Σ_1 — одинична сфера в $\mathbb{R}^N$. Виділимо $M_t^X(r)$:

$$\begin{aligned} u(t,X) &= 2\pi^{-N/2}v_N\int_0^{+\infty} r^{N+1}e^{-r^2}(r^N v_N)^{-1}\int_0^r \rho^{N-1}d\rho\int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)J_1 d\Psi dr \\ &= 2\pi^{-N/2}v_N\int_0^{+\infty} r^{N+1}e^{-r^2}M_t^X(r)dr. \end{aligned} \quad (8)$$

Залишилось здійснити граничний перехід під знаком інтеграла (8) при $t \to \infty$. Це можна зробити на основі теореми Лебега, оскільки існує граничне середнє, а з обмеженості $u_0(X)$ безпосередньо випливає рівномірна (за t) обмеженість $M_t^X(r)$.

Зауважимо, що достатньо вимагати граничного середнього в деякій фіксованій точці X_1, звідки вже випливає існування граничного середнього в будь-якій точці X і факт стабілізації на кожному компакті. □

Теорема 2. *Якщо $u_0(X) \ge 0$, то для стабілізації інтеграла Пуассона (4) до нуля необхідно і достатньо, щоб $u_0(X)$ мала граничне середнє $M^X(r)$, яке майже скрізь дорівнює нулеві.*

Доведення. Достатність випливає із теореми 1.

Покажемо, що зі стабілізації інтеграла (4) випливає існування нульового граничного середнього по $F_{r,t}^X$:

$$M_t^X(r) = \frac{1}{mes\,F_{r,t}^X}\int_{F_{r,t}^X} u_0(\Xi)d\Xi \le ct^{-N_1/6}\int_{\mathbb{R}^N} exp\{-\rho(t^{1/3},X,0,\Xi)\}u_0(\Xi)d\Xi = c_1u(t^{1/3},X). \quad (9)$$

У нерівності (9) $mes\,F_{r,t}^X$ замінено об'ємом куба зі стороною $t^{1/6}$, який міститься в $F_{r,t}^X$. Оскільки $u(t,X) \to 0$ при $t \to \infty$, то з (9) випливає, що $M_{t,r}^X \to 0$ при $t \to \infty$ для будь-якого r. □

2 Рівномірна стабілізація інтеграла Пуассона

Розглянемо задачу Коші для рівняння порядку $2b$ за змінними x

$$\left(D_t - (x^{(1)}, D_{y_1}) - (y_1^{(2)}, D_{y_2}) - (y_2^{(3)}, D_{y_3}) - \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k\right)u = 0, \quad (10)$$

де $D_t - \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k$ — параболічний за Петровським оператор зі сталими коефіцієнтами.

Ф.р. задачі Коші (10), (2) задовольняє нерівності [6]

$$|D_{y_1}^i D_{y_2}^j D_{y_3}^s D_x^k Z(t,X;\tau,\Xi)| \le C(t-\tau)^{-N_2/(2b)}exp\{-\rho_1(t,X;\tau,\Xi)\}, \quad (11)$$

де $N_2 = |k| + n + (2b+1)(m_1 + |i|) + (4b+1)(m_2 + |j|) + (6b+1)(m_3 + |s|)$,

$$\begin{aligned} \rho_1(t,X;\tau,\Xi) = &\Big(|x-\zeta|(t-\tau)^{-1/(2b)}\Big)^q + \Big(|y_1 - \eta_1 + x^{(1)}|(t-\tau)^{-(2b+1)/(2b)}\Big)^q \\ &+ \left(\left|y_2 - \eta_2 + y_1^{(2)}(t-\tau) + \frac{x^{(2)}(t-\tau)^2}{2}\right|(t-\tau)^{-(4b+1)/(2b)}\right)^q \\ &+ \left(\left|y_3 - \eta_3 + y_2^{(3)}(t-\tau) + \frac{y_1^{(3)}(t-\tau)^2}{2} + \frac{x^{(3)}(t-\tau)^3}{6}\right|(t-\tau)^{-(6b+1)/(2b)}\right)^q, \end{aligned}$$

$q = 2b/(2b-1)$. Нехай $u_0(X)$ має граничне середнє

$$\lim_{b_1\to\infty,\dots,b_N\to\infty}\frac{1}{2^{2N}\prod_{s=1}^N b_s}\int_{-b_1}^{b_1}\dots\int_{-b_N}^{b_N} u_0(\Xi)d\Xi = \iota, \quad (12)$$

де $b_j \to \infty$ незалежно одне від одного, $j = 1, 2, \dots, N$.

Теорема 3. *Для того, щоб інтеграл Пуассона рівняння (10) рівномірно стабілізувався до l при $t \to \infty$ необхідно і достатньо, щоб $u_0(X)$ мала граничне середнє, яке дорівнює l.*

Доведення. Нехай $u_0(X)$ має рівномірне граничне середнє, що дорівнює 0. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $b_0(\varepsilon)$, що при всіх $b_j > b_0(\varepsilon)$ і при будь-якому X виконується

$$\left|\frac{1}{2^{2N}\prod_{s=1}^{N} b_s}\int_{-b_1+x_{11}}^{b_1+x_{11}}\dots\int_{-b_N+y_{3m_3}}^{b_N+y_{3m_3}} u_0(\Xi)d\Xi\right| = 0.$$

Звідси випливає, що $u_0(X)$ має кутові граничні середні, що дорівнюють 0.

Зробивши в інтегралі Пуассона заміну змінних

$$x-\zeta = -\zeta' t^{1/(2b)}, \qquad y_1-\eta_1+x^{(1)}t = -\eta_1' t^{(2b+1)/(2b)},$$
$$y_2-\eta_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2} = -\eta_2' t^{(4b+1)/(2b)}, \quad y_3-\eta_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6} = -\eta_3' t^{(6b+1)/(2b)},$$

одержимо

$$u(t,X) = t^{N_3/(2b)}\int_{\mathbb{R}^N} Z^*(t,X;0,\Xi')u_0\Big(x+\zeta' t^{1/(2b)}, y_1+x^{(1)}t+\eta_1' t^{(2b+1)/(2b)},$$
$$y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\eta_2' t^{(4b+1)/(2b)}, y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{(6b+1)/(2b)}\Big)d\Xi',$$

де $Z^*(t,X;0,\Xi')$ — ф.р. задачі Коші (10), (2) у нових змінних,

$$N_3 = n+(2b+1)m_1+(4b+1)m_2+(6b+1)m_3,$$

або інакше

$$u(t,X) = t^{N_3/(2b)}\int_{\mathbb{R}^N} Z^*(t,X;0,\Xi')\frac{\partial^N}{\partial\zeta_1\dots\partial\eta_{3m_3}}\int_0^{\zeta_1}\dots\int_0^{\eta_{3m_3}} u_0\Big(x+\zeta' t^{1/(2b)},$$
$$y_1+x^{(1)}t+\eta_1' t^{(2b+1)/(2b)}, y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\eta_2' t^{(4b+1)/(2b)},$$
$$y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{(6b+1)/(2b)}\Big)d\Xi' d\Xi.$$

Проінтегрувавши частинами, матимемо

$$u(t,X) = (-1)^N t^{N_3/(2b)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial^N Z^*(t,X;0,\Xi')}{\partial\zeta_1\dots\partial\eta_{3m_3}}\int_0^{\zeta_1}\dots\int_0^{\eta_{3m_3}} u_0\Big(x+\zeta' t^{1/(2b)},\dots,$$
$$y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+\frac{1}{6}x_{m_3}t^3-\eta_{3m_3}' t^{(6b+1)(2b)}\Big)d\Xi' d\Xi = I_1+I_2+I_3, \tag{13}$$

де I_1 — інтеграл по області, для якої виконується хоч одна із нерівностей

$$|\zeta_s| > B_s, |\eta_{ij}| > B_{ij}, \quad s=1,2,\dots, \quad n, i=1,2,3, \quad j=1,2,\dots,m_i,$$

I_2 — інтеграл по області $\{0 < h_s \le |\zeta_s| \le B_s,\ 0 < h_{ij} \le |\eta_{ij}| \le B_{ij}\}$; I_3 — інтеграл по області $\{|\zeta_s| \le h_s, |\eta_{ij}| \le h_{ij}\}$.

Оскільки

$$\left|\frac{\partial^N Z^*(t,X;0,\Xi')}{\partial\zeta_1\dots\partial\eta_{3m_3}}\right| \le C_N t^{-N_3/(2b)} exp\{-c|\Xi|^q\},$$

то звідси випливає, що можна вибрати великі B_s, B_{ij} і достатньо малі h_s, h_{ij}, залежні тільки від ε, що для всіх X і t виконується

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}, |I_3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Перейдемо до оцінки I_2. Позначимо

$$g_t(\Xi) = \int_0^{\zeta_1}\dots\int_0^{\zeta_{3m_3}} u_0\Big(x+\zeta' t^{1/(2b)}, y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{(6b+1)/(2b)}\Big)d\Xi.$$

Зробивши заміну змінних

$$x+\zeta' t^{1/(2b)} = a, y_1+x^{(1)}+t'\eta_1 t^{(2b+1)/(2b)} = \alpha_1,$$
$$y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\eta_2' t^{(4b+1)/(2b)} = \alpha_2,$$
$$y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{(6b+1)/(2b)}) = \alpha_3,$$

$g_t(\Xi)$ запишемо у вигляді

$$g_t(\Xi) = t^{N_3/(2b)}\int\limits_{x_{11}}^{x_{11}+\zeta_{11}t^{1/(2b)}}\dots\int\limits_{y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+x_{m_3}\frac{t^3}{6}}^{y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+x_{3m_3}\frac{t^3}{6}+\eta_{3m_3}t^{(6b+1)/(2b)}} u_0(A)dA.$$

Оскільки $u_0(X)$ має кутові граничні середні, то для будь-яких X, $|X| \le K$, $t > N_0$, $|g_t(\Xi)|(\zeta_{11}\dots\eta_{3m_3})^{-1} < \delta$ виберемо

$$\delta = C_N^{-1}\frac{\varepsilon}{3}\left(\prod_{s=1}^{N} B_s\cdot\prod_{i,j} B_{i,j}\int_{\mathbb{R}^N} exp\{-c_0|A|^q\}dA\right)^{-1},$$

тому $|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$, а $|u(t,X)| < \varepsilon$.

Необхідність умови теореми доведемо методом від супротивного. Нехай

$$u(t,X) = \int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;0,\Xi)d\Xi \to 0, \quad t\to\infty,$$

рівномірно по X, а початкова функція $u_0(X)$ не має рівномірного граничного середнього (12), де $l=0$. Це означає, що знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що для будь-якого додатного n_0 знайдеться $\mathcal{B} > n_0$ і така точка $\mathcal{M}$, що

$$|S(\mathcal{B},\mathcal{M})| = \left|\frac{1}{2\mathcal{B}^N}\int_{V_{\mathcal{B}}^{\mathcal{M}}} u_o(\Xi)d\Xi\right| \ge \varepsilon_0,$$

де $V_{\mathcal{B}}^{\mathcal{M}}$ — куб зі стороною $\mathcal{B}$ і центром у точці $\mathcal{M}$.

Оскільки ф.р. $Z(t,X;0,0)$ можна записати як

$$Z(t,X;0,0) = t^{-N_3/(2b)}Z_1\Big(xt^{-1/(2b)}, (y_1+x^{(1)}t)t^{-(2b+1)/(2b)},$$
$$\Big(y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}\Big)t^{-(4b+1)/(2b)}, \Big(y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}}{t}{}^2\,2+\frac{x^{(3)}t^3}{6}\Big)t^{-(6b+1)/(2b)}\Big),$$

де Z_1 — ціла функція вказаних аргументів при $t > 0$, і

$$\int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;0,0)dx = \int_{\mathbb{R}^N} Z_1(A)dA = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^N} Z_1(A)dA = \int_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA + \int_{\mathbb{R}^N - V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA,$$

$V_{\mathcal{B}^*}$ — куб зі стороною $\mathcal{B}^*$, що

$$\int_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA < \frac{\varepsilon_0}{4}, \qquad \int_{\mathbb{R}^N - V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Після відповідної заміни змінних інтеграл Пуассона запишемо у такому вигляді:

$$u(t,X) = \int\limits_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)u_0\Big(x + \alpha t^{1/(2b)}, y_1 + x^{(1)}t + \beta_1 t^{(2b+1)/(2b)},$$
$$y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \beta_2 t^{(4b+1)/(2b)}, y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \beta_3 t^{(6b+1)/(2b)}\Big)dA$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N - V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)u_0\Big(x + \alpha t^{1/(2b)}, y_1 + x^{(1)}t + \beta_1 t^{(2b+1)/(2b)}, y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \beta_2 t^{(4b+1)/(2b)},$$
$$y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \beta_3 t^{(6b+1)/(2b)}\Big)dA = I_1 + I_2.$$

Для простоти будемо вважати, що $|u_0(X)| \leq 1$, $\mathcal{B}^*$ вибрано так, що $|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Виберемо послідовність $n_0^k \to \infty$, за нею знайдемо послідовність $\mathcal{B}_{(k)} \to \infty$ і $\mathcal{M}_{i(k)}$ такі, що $|S(\mathcal{B}_{i(k)}, \mathcal{M}_{i(k)})| \geq \varepsilon_0$, та означимо послідовність $t_{i(k)} = \left(\frac{\varepsilon_0}{8N\mathcal{B}^*}\mathcal{B}_{i(k)}\right)^{2b}$. Розглянемо

$$\left|\frac{1}{2^N\mathcal{B}_{i(k)}^N}\int_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} u(t_{i(k)}, X)dX\right| = \int_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA S(\mathcal{B}_{i(k)}, \mathcal{M}_{i(k)})$$
$$- \int_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA\left|\frac{1}{2^N\mathcal{B}_{i(k)}^N}\Big[\int_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} u_0\Big(x + \alpha t^{1/(2b)}, y_1 + x^{(1)}t + \beta_1 t^{(2b+1)/(2b)},\right.$$
$$y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \beta_2 t^{(4b+1)/(2b)}, y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \beta_3 t^{(6b+1)/(2b)}\Big)dX$$
$$\left.- \int_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} u_0(X)dX\Big]\right| - \frac{1}{2^N\mathcal{B}_{i(k)}^N}\int_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} |I_2|dX \geq \frac{\varepsilon_0}{4}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{4}\right) - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} \geq \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Із цієї нерівності випливає, що в кожному кубі $V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}$ є хоча б одна точка $X_{(k)}$, у якій $u(t_{(k)}, X_{(k)}) \geq \frac{\varepsilon}{4}$, а $t_{(k)} \to \infty$, що суперечить рівномірній збіжності. □

Зауваження. *При $n = n_1$, $n_2 = n_3 = 0$ одержимо результат робіт [2, 6].*

REFERENCES

[1] Burtnyak I.V., Malytska H.P. *Option prices calculation by spectral analysis methods.* Business Inform 2013, **4**, 152–158. (in Ukrainian)

[2] Malytska H.P., Eidelman S.D. *On fundamental solutions and solution stabilization of Cauchy problem for some class of degenerated parabolic equations.* Differential equations 1975, **11** (7), 1316–1330. (in Russian)

[3] Malytska H.P. *Fundamental solution construction of Cauchy problem solution for diffusion equation with variable inertia.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1999, **42** (3), 56–60. (in Ukrainian)

[4] Malytska H.P. *Fundamental solution matrix of the Cauchy problem for a class of systems of Kolmogorov type equations.* Differential Equations 2010, **46** (5), 753–757.

[5] Malytska H.P. *On the structure of fundamental solution of Cauchy problem for elliptic-parabolic equations, which generalize diffusion equation with inertia.* Bull. National Univ. "Lvivs'ka Politechnika". Appl. Math. Series 2000, **411**, 221–228. (in Ukrainian)

[6] Malytska H.P., Repnikov V.D., Eidelman S.D. *On stabilization of Cauchy problem solution for diffusion equation with inertia.* Works Sci. Inst. Math. Voronezh Univ. 1972, **5**, 86–92. (in Russian)

Надійшло 03.07.2013

Malytska H.P., Burtnyak I.V. *On stabilization of Poisson integral for equations of Kolmogorov type.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 290–297.

Stabilization of Poisson integral for Kolmogorov equations is studied. Such equations have three groups of variables with degeneration of parabolicity.

Key words and phrases: ultraparabolic equations, Kolmogorov equations, stabilization, Poisson integral.

Малицкая А.П., Буртняк И.В. *О стабилизации интеграла Пуассона уравнений типа Колмогорова* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 290–297.

Исследуется стабилизация интеграла Пуассона для уравнений типа Колмогорова, что имеют три группы переменных, за которыми есть вырождение параболичности.

Ключевые слова и фразы: ультрапараболические уравнения, уравнения Колмогорова, стабилизация, интеграл Пуассона.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.576

Мулява О.М.[1], Шеремета М.М.[2]

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ДОСТАТНІХ УМОВ НАЛЕЖНОСТІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДО КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ

Мулява О.М., Шеремета М.М. *Зауваження до достатніх умов належності аналітичних функцій до класів збіжності* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 298–304.

Добре відомо, що якщо тейлорові коефіцієнти f_k цілої функції f задовольняють умови $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k \to \infty$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_k|^{k/\varrho} < +\infty$, то f належить до валіронового класу збіжності. Доведено, що у цьому твердженні умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ можна замінити умовою $(l_{k-1}l_{k+1}/l_k^2)|f_k|/|f_{k+1} \nearrow +\infty$, де додатна послідовність (l_k) така, що $\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \asymp 1$ при $k \to \infty$. Подібні результати отримано для інших класів збіжності цілих та аналітичних в одиничному крузі функцій.

Ключові слова і фрази: ціла функція, аналітична в крузі функція, клас збіжності.

[1] Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
E-mail: info@nuft.edu.ua (Мулява О.М.), m_m_sheremeta@list.ru (Шеремета М.М.)

Вступ

Для степеневого ряду
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$
з радіусом збіжності $R[f] \in (0, +\infty)$ і $0 \le r < +\infty$ нехай $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Якщо $R[f] = +\infty$, тобто f — ціла функція, то величину $\varrho = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}$ називають її порядком, а за умови $0 < \varrho < +\infty$ належність до валіронового класу збіжності означають [10] умовою
$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^{\varrho+1}} dr < +\infty. \tag{2}$$
З доведеної П.Камсеном [4] теореми про належність цілого ряду Діріхле до класу збіжності випливає такий результат.

Теорема 1. *Для того, щоб ціла функція* (1) *належала до валіронового класу збіжності необхідно, а у випадку, коли* $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ *при* $k_0 \le k \to \infty$, *і достатньо, щоб* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_k|^{k/\varrho} < +\infty$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 3D15.

Якщо функція f аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, то порядок її зростання переважно вводять за формулою $\varrho^0 = \varlimsup\limits_{r\uparrow 1} \dfrac{\ln \ln M(r, f)}{-\ln(1-r)}$, а за умови $0 < \varrho^0 < +\infty$ належність до класу збіжності означають [2] умовою
$$\int_0^1 (1-r)^{\varrho^0-1} \ln^+ M(r, f) dr < +\infty. \tag{3}$$
З доведеної в [2] теореми випливає наступний результат.

Теорема 2. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{D}$ *функція* (1) *належала до означеного умовою* (3) *класу збіжності необхідно, а у випадку, коли* $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow 1$ *при* $k \to \infty$, *і досить, щоб* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\ln^+ |f_k|}{k}\right)^{\varrho^0+1} < +\infty$.

У запропонованій замітці буде показано, що у теоремах 1 і 2 умову неспадання послідовності можна замінити дещо слабшою умовою. Подібну заміну можна здійснити і у випадках узагальнених класів збіжності.

1 Доповнення теорем 1 і 2

Почнемо з цілих функцій.

Теорема 3. *У теоремі 1 умову* $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ *при* $k \to \infty$ *можна замінити умовою* $\dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\dfrac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ *при* $k_0 \le k \to \infty$, *де додатна послідовність* (l_k) *така, що*
$$0 < \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \le \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} < +\infty. \tag{4}$$

Доведення. Нехай $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$. Тоді степеневий ряд
$$D_l^{(1)} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+1}} f_{k+1} z^k$$
називається [3] похідною Гельфонда-Леонтьєва. Якщо $l(z) = e^z$, то $D_l^{(1)} f(z) = f'(z)$. Зауважимо, що не завжди радіус збіжності похідної Гельфонда-Леонтьєва ряду (1) збігається з радіусом збіжності цього ряду, а [5, 6] умова (4) є необхідною і достатньою умовою для того, щоб рівності $R[f] = +\infty$ і $R[D_l^{(1)} f] = +\infty$ були рівносильними. В [6] доведено, що за умови (4) f і $D_l^{(1)} f$ належать до валіронового класу збіжності одночасно. За теоремою 1 для того, щоб $D_l^{(1)} f$ належала до валіронового класу збіжності досить, щоб $\dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\dfrac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|\right)^{\varrho/k} < +\infty$. З (4) випливає, що остання умова рівносильна умові $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_{k+1}|^{k/\varrho} < +\infty$. Оскільки $f_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $|f_{k+1}|^{\varrho/k} = |f_{k+1}|^{\varrho/(k+1)} |f_{k+1}|^{\varrho/k - \varrho/(k+1)} < |f_{k+1}|^{\varrho/(k+1)}$ для всіх $k \ge k_0$, тобто з умови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_k|^{k/\varrho} < +\infty$ випливає умова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_{k+1}|^{k/\varrho} < +\infty$. Теорему 3 доведено. $\square$

Для аналітичних в одиничному крузі функцій правильна наступна теорема.

Теорема 4. *У теоремі 2 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow 1$ при $k_0 \le k \to \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 1$ при $k_0 \le k \to \infty$, де додатна послідовність (l_k) така, що*

$$0 < \varliminf_{k\to\infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} \le \varlimsup_{k\to\infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} < +\infty. \tag{5}$$

Доведення. В [7] доведено, що за умов (5) аналітична в $\mathbb{D}$ функція (1) та її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(1)}$ належить чи не належить до означеного умовою (3) класу збіжності одночасно. За теоремою 2 для того, щоб $D_l^{(1)}f$ належала до цього класу збіжності досить, щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow$ при $k_0 \le k \to \infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\ln^+\left(\frac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|\right)\right)^{\varrho^0+1} < +\infty$. Але з огляду на (5)

$$\frac{1}{k}\ln^+\left(\frac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|\right) \le \frac{\ln^+|f_k|}{k} + \frac{1}{k}\ln\frac{l_k}{l_{k+1}} + \ln 2 \le \frac{\ln^+|f_k|}{k} + C\frac{\ln k}{k},$$

де C — додатна стала, і оскільки $\varrho^0 > 0$, то

$$\left(\frac{1}{k}\ln^+\left(\frac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|\right)\right)^{\varrho^0+1} \le \left(\frac{\ln^+|f_k|}{k}\right)^{\varrho^0+1} + C\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{\varrho^0+1}.$$

Тому остання умова випливає з умови $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^+|f_k|}{k}\right)^{\varrho^0+1} < +\infty$. Теорему 4 доведено. □

2 Узагальнені класи збіжності

Через L^0 позначимо клас таких додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій α, що $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. З наведеної у [8] теореми 1 випливає наступний результат.

Теорема 5. *Нехай α — вгнута неперервно диференційовна на $[x_0, +\infty)$ функція, $\alpha(e^x) \in L^0$, $\alpha'(x+O(1)) \asymp \alpha'(x)$ при $x \to +\infty$, а функція $\beta \in l^0$ така, що $x\frac{\beta'(x)}{\beta(x)} \ge h > 0$ для $x \ge x_0$ і $\int\limits_1^{\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}dx < +\infty$. Тоді для того, щоб для цілої функції (1)*

$$\int_1^{\infty}\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{r\beta(\ln r)}dr < +\infty \tag{6}$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|f_k|/|f_{k+1})$ для $k \ge k_0$ є неспадною, і досить, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha'(k)\beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|f_k|}\right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty}\frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}. \tag{7}$$

З іншого боку, в [6] доведено, що якщо $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$, то за умови (4) ціла функція (1) та її похідна Гельфонда-Леонтьєва належать чи не належать до означеного умовою (6) узагальненого класу збіжності одночасно. За теоремою 5 для того, щоб (1) належала до цього класу досить, щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 0$ при $k_0 \le k \to \infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha'(k)\beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k+1}}{l_k|f_{k+1}|}\right) < +\infty. \tag{8}$$

Оскільки $\beta \in L^0$, то $\beta_1((1+o(1))x) = (1+o(1))\beta_1(x)$ при $x \to +\infty$, і з огляду на умову (4) при $k \to \infty$

$$\beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k+1}}{l_k|f_{k+1}|}\right) = \beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|f_{k+1}|} + O(1)\right) = (1+o(1))\left(\frac{1}{k+1}\ln\frac{1}{|f_{k+1}|}\right),$$

то з (7) випливає (8), і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 6. *У теоремі 5 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$, де послідовність (l_k) задовольняє умову (4).*

Для аналітичних в одиничному крузі функцій наслідком з теореми 2 з [8] є наступний результат.

Теорема 7. *Нехай функція α така, як у теоремі 5, а функція $\beta \in L^0$ задовольняє умови $x\frac{\beta'(x)}{\beta(x)} - 2 \ge h > 0$ для $x \ge x_0$ і $\int_{x_0}^{\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}dx < +\infty$. Тоді для того, щоб для аналітичної в одиничному крузі функції (1)*

$$\int_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln M_f(r))}{(1-r)^2\beta(1/(1-r))}dr < +\infty \tag{9}$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|f_{k-1}/f_k|)$ для $k \ge k_0$ є неспадною, і досить, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha'(k)\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+|f_k|}\right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty}\frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}. \tag{10}$$

З іншого боку, з доведеної в [6] теореми 5 неважко отримати, що якщо функції α і β задовольняють умови теореми 7, а

$$0 < p_1 \le \frac{l_{k+1}}{l_k} \le p_2 < +\infty, \tag{11}$$

то аналітична в $\mathbb{D}$ функція f та її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(1)}(f)$ належать чи не належать до означеного умовою (9) узагальненого $\alpha\beta$-класу збіжності. За теоремою 7 для того, щоб $D_l^{(1)}f$ належала до цього класу досить, щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 0$ для $k_0 \le k \to \infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha'(k)\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+((l_k/l_{k+1})|f_{k+1})|)}\right) < +\infty. \tag{12}$$

Але з огляду на (11) маємо $\ln^+((l_k/l_{k+1})|f_{k+1})|) = \ln^+|f_{k+1}| + O(1)$ при $k \to \infty$ і, оскільки $\beta_1((1+o(1))x) = (1+o(1))\beta_1(x)$ при $x \to +\infty$, то

$$\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+((l_k/l_{k+1})|f_{k+1})|)}\right) = (1+o(1))\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+|f_{k+1}|}\right)$$

при $k \to \infty$. Тому з (10) випливає (12), і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 8. *У теоремі 7 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$, де додатна послідовність (l_k) задовольняє умову* (11).

3 Ф-клас збіжності цілих функцій

Через Ω позначимо клас таких додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ, що похідна Φ' є додатною, неперервною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Як в [1] будемо говорити, що ціла функція (1) належить до Φ-класу збіжності, якщо

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\ln r)\ln M(r,f)}{r\Phi(\ln r)}dr < +\infty. \tag{13}$$

З доведеної в [9] теореми 1 випливає наступний результат.

Теорема 9. *Нехай $\Phi \in \Omega$ і*

$$0 < h \le \frac{\Phi''(x)\Phi(x)}{(\Phi'(x))^2} \le H < +\infty, \quad x \ge x_0. \tag{14}$$

Тоді для того, щоб ціла функція (1) *належала до Φ-збіжності, необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|f_{k-1}/f_k|)$ є неспадною для $k_0 \le k \ge k_0$, і досить, щоб*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi'\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|f_k|}\right)} < +\infty. \tag{15}$$

З іншого боку, в [6] доведено, що якщо

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi'(x)\ln\Phi'(x)}{\Phi^2(x)}dx < +\infty, \tag{16}$$

а послідовність (l_k) задовольняє умову (11), то ціла функція f та її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D^{(1)}$ належать чи не належать до Φ-класу одночасно.

Зауважимо, що з (14) випливає (16), бо, інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi'(x)\ln\Phi'(x)}{\Phi^2(x)}dx = \int_{x_0}^{\infty} \ln\Phi'(x)d\left(-\frac{1}{\Phi(x)}\right)$$
$$\le \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)\Phi(x)}dx + \text{const} \le \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi'(x)}{\Phi^2(x)}dx + \text{const}.$$

Тому за теоремою 9 для того, щоб $D_l^{(1)}f$ належала до Φ-класу збіжності, досить, щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 0$ при $k_0 \le k \to \infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi'\left(\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k+1}}{l_k|f_{k+1})|}\right)} < +\infty. \tag{17}$$

Але з огляду на (11) маємо $\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k+1}}{l_k|f_{k+1})|} = \frac{1}{k}\left(\ln\frac{1}{|f_{k+1}|} + O(1)\right) = \frac{1+o(1)}{k+1}\ln\frac{1}{|f_{k+1}|}$ при $k_0 \le k \to \infty$. Тому, якщо $\Phi' \in L^0$, то з (5) випливає (17), і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 10. *Якщо $\Phi' \in L^0$, то у теоремі 9 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$, де додатна послідовність (l_k) задовольняє умову* (11).

4 Зауваження

Покажемо, що існують такі послідовності (f_k) і (l_k), що умова $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ не виконується, але $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ і f належить, наприклад, до валіронового класу збіжності.

Нехай (k_n) — досить швидко зростаюча послідовність натуральних чисел, наприклад, $k_{n+1} - k_n \ge 5$, а $f_k = \left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right)^k$ для $2 \le k \ne k_n$ і $f_{k_n} = \sqrt{\frac{k_n^2-1}{k_n^2}f_{k_n-1}f_{k_n+1}}$. За формулою Адамара ціла функція f з такими коефіцієнтами має порядок $\varrho = 1$. Неважко перевірити, що $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^{1/k} < +\infty$. Оскільки $\frac{f_{k_n}}{f_{k_n+1}} = \frac{k_n^2-1}{k_n^2}\frac{f_{k_n-1}}{f_{k_n}}$, то умова $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ не виконується і використати теорему 1 для того, щоб показати, що f належить до валіронового класу збіжності з $\varrho = 1$ неможливо. Проте, якщо виберемо $l_k = 1/k!$, то умова (4) виконується, $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} = \frac{k}{k+1}$, і неважко перевірити, що $\frac{k|f_k|}{(k+1)|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$, тобто за теоремою 3 f належить до валіронового класу збіжності з $\varrho = 1$.

References

[1] Filevych P.V., Sheremeta M.M. *On a convergence class for entire functions.* Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz **53** Ser. Rech. Deform. 2003, **40**, 5–16.

[2] Gal' Yu.M., Sheremeta M.M. *Belonging of analytic functions to a convergence class.* Dokl. AN Ukr. SSR, Ser. A 1985, **7**, 11–14. (in Russian)

[3] Gelfond A.O., Leont'ev A.F. *On a generalisation of Fourier series.* Matem. Sbornik 1957, **23** (3), 477–500. (in Russian)

[4] Kamthan P.K. *A theorem of step functions.* Istambul Univ. Fen. Fac. Mecm. 1963, **28**, 65–69.

[5] Luhova L.L., Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Properties of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions.* Ufa Math. J. 2010, **2** (32), 90–101. (in Russian)

[6] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *On belonging of Gelfond-Leont'ev derivative to a convergence class.* Sci. Bull. Chernivtsi Univ. 2009, **485**, 71–77. (in Ukrainian)

[7] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Belonging to convergence classes of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions.* Carpathian Math. Publ. 2012, **4** (1), 11–115. (in Ukrainian)

[8] Mulyava O.M. *Convergence classes in the theory of Dirichlet series.* Dopovidi NAN Ukraine, ser. A 1999, **2**, 35–39. (in Ukrainian)

[9] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *On a convergence class for Dirichlet series.* Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz **50** Ser. Rech. Deform. 2000, **30**, 23–30.

[10] Valiron G. General theory of integral functions. Toulouse, 1923.

Надійшло 29.08.2013

Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Remarks on sufficient conditions of belonging of analytic functions to convergence classes.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 298–304.

It is well known that if Taylor's coefficients f_n of an entire functions f satisfy the conditions $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ as $k \to \infty$ and $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|^{\varrho/k} < +\infty$ then f belongs to Valiron convergence class. It is proved that in the statement the condition $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ one can replace on the condition $l_{k-1}l_{k+1}l_k^{-2}|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$, where (l_k) is a positive sequence such that $\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \asymp 1$ as $k \to \infty$. Analogous problems are solved for another convergence classes of entire and analytic functions in the unit disk.

Key words and phrases: entire function, analytic function in a disk, convergence class.

Мулява О.М.,Шеремета М.Н. *Замечания о достаточных условиях принадлежности аналитических функций классам сходимости* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 298–304.

Хорошо известно, что если тейлоровские коэффициенты f_n целой функции f удовлетворяют условиям $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k \to \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|^{\varrho/k} < +\infty$, то f принадлежит валироновскому классу сходимости. Доказано, что в этом утверждении условие $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ можно заменить условием $l_{k-1}l_{k+1}l_k^{-2}|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$, где положительная последовательность (l_k) такая, что $\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \asymp 1$ при $k \to \infty$. Аналогичные задачи решены для других классов сходимости целых аналитических в единичном круге функций.

Ключевые слова и фразы: целая функция, аналитическая в круге функция, класс сходимости.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 515.12+512.58

ОВЧАР І.Є.[1], СКАСКІВ О.Б.[2]

ОДИН АНАЛОГ НЕРІВНОСТІ ВІМАНА ДЛЯ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА, ЗАЛЕЖНИХ ВІД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Овчар І.Є., Скасків О.Б. *Один аналог нерівності Вімана для інтегралів Лапласа, залежних від малого параметра* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 305–309.

Встановлюються асимптотичні оцінки зверху інтегралів типу Лапласа.

Ключові слова і фрази: нерівність Вімана, інтеграл Лапласа-Стілт'єса, ряд Діріхле.

[1] Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна
[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Нехай $f(u)$ — довільна невід'ємна вимірна функція на $\mathbb{R}_+ := [0;+\infty)$, а ν — така зліченно-адитивна на $\mathbb{R}_+$ міра з необмеженим носієм, що $\nu(\{x\colon 0 \le x \le b\}) < +\infty$ для кожного $b > 0$. При цьому через $\nu(E)$ позначаємо ν-міру ν-вимірної множини $E \subset \mathbb{R}_+$, тобто $\nu(E) = \int_{\mathbb{R}_+\cap E} \nu(dx)$, а $\nu(a,b] := \nu(\{u \in \mathbb{R}_+ : a < u \le b\})$. Розглянемо функції $F(x)$, визначені на $\mathbb{R}_- := (-\infty;0)$ за допомогою збіжного для всіх $x \in \mathbb{R}_-$ інтегралу

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du). \tag{1}$$

Через $\mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо клас функцій F вигляду (1).

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\psi(t) \nearrow +\infty$ $(0 \le t \to +\infty)$; L_1 — клас функцій $\psi \in L$ таких, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$.

Для вимірної множини $E \subset \mathbb{R}_-$ її логарифмічною мірою називаємо величину

$$m_{\ln}(E) := \int_{E\cap[-1,0)} \frac{dx}{|x|}.$$

Нехай $\operatorname{supp}\nu$ — носій міри ν в $\mathbb{R}_+$, тобто така замкнена множина $E \equiv \operatorname{supp}\nu$, що $\nu(\mathbb{R}_+ \setminus E) = 0$ і $\nu(\{u \in \mathbb{R}_+ : |u-u_0| < r\}) > 0$ для кожних $u_0 \in E$ і $r > 0$.

Для $x < 0$ та $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо

$$\mu_*(x) = \sup\{f(u)e^{xu} : u \in \operatorname{supp}\nu\}.$$

У статті [3] знайдено достатні умови, за яких виконується співвідношення

$$F(x) \le (d + o(1))\mu_*(x)$$

при $x \to -0$ зовні деякої виняткової множини нульової асимптотичної h-щільності у точці $x = 0$ [3]. При цьому множина $E \subset \mathbb{R}_-$, яка має скінченну логарифмічну міру, має також нульову асимптотичну h-щільність у точці $x = 0$ для $h(x) \equiv x$, тобто $\int_{E\cap[x,0)} dx = o(|x|)$ $(x \to -0)$. Метод доведення згаданого щойно твердження є близьким

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

до методу доведень з [5, 6], який по суті експлуатує ту ж ідею використання ймовірнісної нерівності Б'єнеме-Чебишова, що й у П. Розенблума [4]. Власне, доведення базується на використанні такої нерівності [3, нерівність (2)]:

$$F(x) \le \frac{c}{c-1} \int\limits_{|x-g'(x)|<\sqrt{cg''(x)}} e^{xu} f(u)\nu(du), \tag{2}$$

яка виконується для всіх $x<0$ і для будь-якої функції $c=c(x)>1$, де $g(x)=\ln F(x)$.

З нерівності (2) нескладно отримати таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$ і виконується умова*

$$(\exists c_1>0)(\exists c_2>0)(\forall a>0)(\forall b\in(0,a)):\quad \nu(a-b,a+b] \le c_1 b + c_2. \tag{3}$$

Тоді для кожного $\varepsilon>0$ існує така множина $E\subset(-\infty;0)$ скінченної логарифмічної міри, тобто $m_{\ln}(E)<+\infty$, що для всіх $x\in[-1,0)\setminus E$ виконується нерівність

$$F(x) \le \frac{\mu_*(x)}{|x|^{1+\varepsilon}}\Big(\ln\Big(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big)\Big)^{1/2+\varepsilon}. \tag{4}$$

Доведення. З нерівності (2) за умовою (3) отримуємо

$$F(x) \le \frac{c}{c-1}\mu_*(x)(c_1\sqrt{cg''(x)}+c_2). \tag{5}$$

Для функцій $\psi\in L_1$, $h\in\{g(x),g'(x)\}$ означимо множину $E(h):=\{x<0\colon h'(x)\ge \psi(h(x))/|x|\}$. Тоді

$$m_{\ln}(E(h)) = \int_{E(h)}\frac{dx}{|x|} \le \int_{E(h)}\frac{h'(x)dx}{\psi(h(x))} \le \int_{\mathbb{R}_+}\frac{du}{\psi(u)} < +\infty.$$

Отже, $m_{\ln}(E(g)\cup E(g'))<+\infty$ і для всіх $x\in[-1,0)$ зовні множини скінченної логарифмічної міри $g''(x)\le \frac{1}{|x|}\psi(\frac{1}{|x|}\psi(g(x)))$. Вибираючи $\psi(t)=t^{1+\delta}$, $c(x)\equiv 2$, а $\delta>0$ достатньо малим, з (5) отримуємо, що при $x\to-0$ $(x\notin E(g)\cup E(g'))$

$$F(x) \le \frac{\mu_*(x)}{|x|^{1/2+\varepsilon/2}}(g(x)/|x|)^{1/2+\varepsilon/2},$$

звідки вже елементарно отримуємо потрібне співвідношення. □

На те, що показники степенів $1+\varepsilon$ і $1/2+\varepsilon$ в нерівності (4) одночасно не можна, взагалі кажучи, замінити на числа менші, ніж 1 і 1/2, вказує таке твердження.

Твердження 2. *Для кожної міри ν такої, що $(\forall x\in\mathbb{R}_-)$: $\int_{\mathbb{R}_+}\exp\{ux\}\nu(du)<+\infty$ і виконується умова*

$$(\exists c_1>0)(\exists c_2>0)(\forall a>0)(\forall b\in(0,a)):\quad \nu(a-b,a+b] \ge c_1 b + c_2, \tag{6}$$

існує функція $F\in\mathcal{I}_0(\nu)$, для якої

$$\varliminf_{x\to-0} F(x)\left(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big(\ln\Big(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big)\Big)^{1/2}\right)^{-1} > 0. \tag{7}$$

Зауваження 1. *Умови (3) і (6) виконуються у випадку, коли ν — міра Лебега на прямій. Про умову (3) те ж саме можна сказати і у випадку, коли міра ν має вигляд $\nu(0,t]=\int_{(0,t]}du/l(u)$, де $l\in L$.*

Доведення. Розглянемо інтеграл вигляду (1) з $f(u)=\exp\{u^\varepsilon\}$ $(u\ge0)$, тобто

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}_+} e^{h(u,x)}\nu(du),$$

де $h(u,x)=u^\varepsilon+xu$, $\varepsilon\in(0,1)$. Зрозуміло, що $F\in\mathcal{I}_0(\nu)$. Справді, при фіксованому $x<0$ для всіх достатньо великих $u\ge u_0$ маємо $u^\varepsilon\le u|x|/2$, тому за умовою

$$F(x)\le\int_0^{u_0}e^{h(u,x)}\nu(du)+\int_{\mathbb{R}_+}e^{xu/2}\nu(du)<+\infty.$$

Крім цього, очевидно, що $\min\{F(x),\mu_*(x)\}\to+\infty$ $(x\to-0)$.

Зауважимо тепер, що для кожного $x<0$ точку $u(x)$ максимуму підінтегральної функції знаходять з рівняння $h'_u(u,x)=\varepsilon\cdot u^{\varepsilon-1}-|x|=0$ і, отже,

$$u(x)=(\varepsilon/|x|)^{1/(1-\varepsilon)},\quad \ln\mu_*(x)=h(u(x),x)=(1-\varepsilon)(u(x))^\varepsilon=(1-\varepsilon)(\varepsilon/|x|)^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}. \tag{8}$$

Оскільки $h''_u(u,x)=\varepsilon(\varepsilon-1)\cdot u^{\varepsilon-2}$, то за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа

$$h(u,x)=h(u(x),x)-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\frac{(u-u(x))^2}{(u(x)+\theta(u-u(x)))^{2-\varepsilon}},\quad \theta\in(0,1).$$

Тому, якщо вибрати $v=v(x)=(u(x))^{1-\varepsilon/2}$ $(x<0)$, то $v(x)=o(u(x))$ $(x\to-0)$ і, отже, з умови (6) при $x\to-0$ отримаємо

$$\begin{aligned} F(x) &\ge \mu_*(x)\int_{(u(x)-v,u(x)+v]}\exp\Big\{-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\frac{(u-u(x))^2}{(u(x)+\theta(u-u(x)))^{2-\varepsilon}}\Big\}\nu(du)\\ &\ge \mu_*(x)\nu(u(x)-v(x),u(x)+v(x)]\exp\Big\{-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)(1+o(1))}{2}\Big\}\\ &\ge c_3\mu_*(x)(c_1v(x)+c_2)\qquad (x\to-0), \end{aligned} \tag{9}$$

де $c_3=\exp\{-\varepsilon(1-\varepsilon)/3\}$. З рівностей (8) випливає, що

$$v(x)=(\varepsilon/|x|)^{(1-\varepsilon/2)/(1-\varepsilon)}=\varepsilon^{(1-\varepsilon/2)/(1-\varepsilon)}\frac{1}{|x|}\Big(\frac{1}{|x|}\Big)^{\varepsilon/(2(1-\varepsilon))}=\frac{C_\varepsilon}{|x|}(\ln\mu_*(x))^{1/2}$$

позаяк $(1-\varepsilon/2)/(1-\varepsilon)-1=\varepsilon/(2(1-\varepsilon))$, де $C_\varepsilon=\varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon}$. Залишається зауважити, що

$$\ln\mu_*(x)=(1+o(1))\ln(\mu_*(x)/|x|)\qquad(x\to-0),$$

тому з (9) остаточно отримуємо, що

$$\varliminf_{x\to-0} F(x)\left(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big(\ln\Big(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big)\Big)^{1/2}\right)^{-1}\ge C_\varepsilon c_1c_3>0.$$

□

Зауваження 2. *Нескладно помітити, що якщо міра* ν *задовольняє умову* $(\exists \varepsilon \in (0,1))$: $\underline{\lim}_{t\to+\infty} \nu(t - t^{1-\varepsilon/2}, t + t^{1-\varepsilon/2}]/t = +\infty$, *то для функції* F *з доведення Твердження 1 нижня границя в* (7) *дорівнює* $+\infty$.

З твердження 1 отримаємо наслідок для абсолютно збіжних у півплощині $\Pi_0 := \{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{z\lambda_n}, \tag{10}$$

де (λ_n) — така послідовність, що $0 = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$. Для цього досить, як і в [3], вибрати таку міру ν, що $\nu(E) = \sum_{\lambda_n \in E} \delta_{\lambda_n}(E)$, для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+$, де δ_λ — одинична міра Дірака, зосереджена в точці λ, і застосувати Твердження 1 до ряду Діріхле

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{+\infty} |F_n| e^{\sigma\lambda_n} = \int_0^{+\infty} f(x) e^{x\sigma} d\nu(x) \stackrel{def}{=} I(\sigma),$$

де f — невід'ємна функція така, що $f(\lambda_n) = |F_n|$ і $f(x) = 0$ для всіх $x \notin \{\lambda_n\colon n \ge 0\}$. Тоді $\mu_*(\sigma, I) = \mu(\sigma, F) \stackrel{def}{=} \{|F_n| e^{\sigma\lambda_n}\colon n \ge 0\}$. Звідси негайно за допомогою нерівностей $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F) \le \mathfrak{M}(\sigma, F)$ отримаємо, що

$$M(x, F) \le \frac{\mu(x, F)}{|x|^{1+\varepsilon}} \Big(\ln \Big(\frac{\mu(x, F)}{|x|} \Big) \Big)^{1/2+\varepsilon} \tag{11}$$

при $x \to -0$ $(x \notin E,\ m_{\ln}(E) < +\infty)$, за умов Твердження 1. Залишається зауважити, що умови Твердження 1 для функції $I(x)$ виконуються як тільки

$$(\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\forall a > 0)(\forall b \in (0, a))\colon \quad n(a+b) - n(a+b) \le c_1 b + c_2, \tag{12}$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ — лічильна функція послідовності (λ_n). Отже, отримали такий наслідок.

Наслідок. *Нехай для абсолютно збіжного у півплощині* Π_0 *ряду Діріхле вигляду* (10) *виконується умова* (12). *Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *нерівність* (11) *виконується при* $x \to -0$ $(x \notin E,\ m_{\ln}(E) < +\infty)$.

Якщо цей наслідок застосувати до функції $F(s) = f(e^s)$, де $f(z)$ — аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ функція, задана степеневим рядом вигляду $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ з радіусом збіжності $R(f) = 1$, то отримаємо таке твердження (див., наприклад, [1, 7]): *для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує така множина* $E \subset (0,1)$ *скінченної логарифмічної міри, тобто* $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$, *що для всіх* $r \in (0,1) \setminus E$ *виконується такий аналог класичної нерівності Вімана:*

$$M_f(r) \le \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\varepsilon}} \ln^{1/2+\varepsilon} \frac{\mu_f(r)}{1-r},$$

де $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n\colon n \ge 0\}$.

Варто також зауважити, що для абсолютно збіжних у півплощині Π_0 рядів вигляду (10), невід'ємна послідовність показників яких задовольняє лише умову

$$\sup\{\lambda_n\colon n \ge 0\} = +\infty$$

(тобто, зокрема, може мати будь-яку кількість скінченних точок скупчення), у статті [2] знайдено умови на послідовність $(|F_n|)$, за яких нерівність вигляду

$$M(x, F) \le \mu(x, F)(\ln \mu(x, F))^q$$

виконується для всіх $x < 0$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри і є непокращуваною. Повні аналоги останньої нерівності нескладно отримуються для інтегралів вигляду (1), що є скінченними для всіх $x \in \mathbb{R}$, з тверджень, які доведено в [5, 6].

References

[1] Kővari T. *On the maximum modulus and maximum term of functions analytic in the unit disc.* J. London Math. Soc. 1966, **41**, 129–137. doi:10.1112/jlms/s1-41.1.129

[2] Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *Wiman type inequalities for entire Dirichlet series with arbitrary exponents.* Mat. Stud. 2013, **40** (1), 108–112.

[3] Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *On the estimates of the Laplace integrals on the small parameter.* Carpathian Math. Publ. 2011, **3** (1), 106—111. (in Ukrainian)

[4] Rosenbloom P.C. Probability and entire functions. In: Szegő G., Loewner Ch. (Eds.) Studies Math. Anal. and Related Topics. Calif. Univ. Press, Stanford, 1962, 325–330.

[5] Skaskiv O.B. *On certain relations between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series.* Math. Notes 1999, **66** (2), 223–232. doi:10.1007/BF02674881 (translation of Mat. Zametki, 1999, **66** (2), 282–292 (in Russian))

[6] Skaskiv O.B., Trakalo O.M. *Asymptotic estimations for Laplace type integrals.* Mat. Stud. 2002, **18** (2), 125–146. (in Ukrainian)

[7] Suleimanov N.M. *Wiman-Valiron type estimates for power series with finite radius of convergence and their accuracy.* Dokl. Akad. Nauk USSR 1980, **253** (4), 822–824. (in Russian)

Надійшло 26.09.2013

Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *Some analogue of the Wiman inequality for the Laplace integrals on a small parameter.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 305–309.

Asymptotic estimates from below for the Laplace integrals are established.

Key words and phrases: Wiman's inequality, Laplace-Stieltjes integral, Dirichlet series.

Овчар И.Е., Скаскив О.Б. *Один аналог неравенства Вимана для интегралов Лапласа, зависящих от малого параметра* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 305–309.

Устанавливаются асимптотические оценки сверху интегралов типа Лапласа.

Ключевые слова и фразы: неравенство Вимана, интеграл Лапласа-Стильтьеса, ряд Дирихле.

ISSN 2075-9827
http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2
Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 512.624

POPOVYCH R.

LOWER BOUNDS ON THE ORDERS OF SUBGROUPS CONNECTED WITH AGRAWAL CONJECTURE

Popovych R. *Lower bounds on the orders of subgroups connected with Agrawal conjecture.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 310–314.

Explicit lower bounds are obtained on the multiplicative orders of subgroups of a finite field connected with primality proving algorithm.

Key words and phrases: primality proving, finite field, multiplicative order.

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine
E-mail: rombp07@gmail.com

INTRODUCTION

Prime numbers are of fundamental importance in mathematics in general: there are few better known or more easily understood problems in pure mathematics than the question of rapidly determining whether a given number is prime or composite. Efficient primality tests are also useful in practice: a number of cryptographic protocols need big prime numbers.

In 2002 M.Agrawal, N.Kayal and N.Saxena [1] presented a deterministic polynomial-time algorithm AKS that determines whether an input number n is prime or composite. It was proved [4] that AKS algorithm runs in $(\log n)^{7.5+o(1)}$ time. H.Lenstra and C.Pomerance [5] gave a significantly modified version of AKS with $(\log n)^{6+o(1)}$ running time.

Probabilistic versions of AKS are also known [3] with $(\log n)^{4+o(1)}$ time complexity. The Agrawal conjecture [1, 4] was proposed for further improvement of AKS running time. A heuristic argument was given [5] which suggests that the above conjecture is false. However, it was pointed out [1] that some variant of the conjecture may still be true. A modified conjecture is given in [7]. A strongly ascending chain of subgroups of the multiplicative group of a finite field appears in this conjecture.

Using results from [8], we obtain in this paper lower bounds on the orders of these subgroups.

1 PRELIMINARIES

Let q be a power of an odd prime number p, and F_q be a finite field with q elements. We use F_q^* to denote the multiplicative group of F_q. A partition of an integer C is a sequence of non-negative integers $u_1, ..., u_C$ such that $\sum_{j=1}^{C} ju_j = C$. $U(C)$ denotes the number of the partitions of C. $U(C, d)$ denotes the number of such partitions of C, for which $u_1, ..., u_C \leq d$, i.e., each part

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11T30.

appears no more than d times. $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ denotes the group generated by elements $v_1, ..., v_k$, and $G \times H$ — the direct product of groups G and H. $|G|$ denotes the multiplicative order of the group G.

Let q be a primitive root modulo r, that is the multiplicative order of q modulo r equals to $r-1$. Set $F_q(\theta) = F_{q^{r-1}} = F_q[x]/\Phi_r(x)$, where $\Phi_r(x) = x^{r-1} + x^{r-2} + ... + x + 1$ is the r-th cyclotomic polynomial and $\theta = x \ (mod\ \Phi_r(x))$. It is clear that the equality $\theta^r = 1$ holds. The element $\beta = \theta + \theta^{-1}$ is called a Gauss period of type $((r-1)/2, 2)$. It generates normal base over F_q [2].

The following strongly ascending chain of subgroups of the multiplicative group appears (if to take $q = p$ is a prime number and $r < p$) in the modified conjecture [7]:

$$\langle \theta \rangle \subset \langle \theta + 1 \rangle \subset \langle \theta - 1 \rangle \subset \langle \theta - 1, \theta + 2 \rangle .$$

It was shown in [2], that the order of Gauss period β is at least $U((r-3)/2, p-1)$. In [8, Theorem 1], this result was improved and generalized, i.e. the following theorem was proved.

Theorem 1. *Let q be a power of an odd prime number p, $r = 2s+1$ be a prime number coprime with q, q be a primitive root modulo r, θ generates the extension $F_q(\theta) = F_{q^{r-1}}$, e be any integer, f be any integer coprime with r, a be any non-zero element in the finite field F_q. Then*
(a) $\theta^e(\theta^f + a)$ has the multiplicative order at least $U(r-2, p-1)$,
(b) $(\theta^{-f} + a)(\theta^f + a)$ for $a^2 \neq \pm 1$ has the multiplicative order at least $U((r-3)/2, p-1)$ and this order divides $q^{(r-1)/2} - 1$,
(c) $\theta^{-2e}(\theta^{-f} + a)(\theta^f + a)^{-1}$ for $a^2 \neq 1$ has the multiplicative order at least $U((r-3)/2, p-1)$ and this order divides $q^{(r-1)/2} + 1$,
(d) $\theta^e(\theta^f + a)$ for $a^2 \neq \pm 1$ has the multiplicative order at least $[U((r-3)/2, p-1)]^2/2$.

We take to the end of the paper that $q = p > 3$ is a prime number and $r < p$.

Explicit lower bounds on the orders of subgroups connected with Agrawal conjecture in terms of p and r are of special interest. That is why we use in this paper Theorem 1 and some known estimate from [6] to derive explicit lower bounds on the multiplicative orders of $\langle \theta + 1 \rangle$, $\langle \theta - 1 \rangle$ and $\langle \theta - 1, \theta + 2 \rangle$.

If $C < d$, then clearly $U(C, d) = U(C)$. Explicit lower bound on $U(C)$ for all integers C is proposed in [6]. According to [6, Theorem 4.2], the following inequality holds for all integers C:

$$U(C) > \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{C}\right)}{13C}. \tag{1}$$

2 LOWER BOUNDS ON THE ORDERS

We obtain in this section lower bounds on the orders of subgroups connected with Agrawal conjecture. First of all, it is clear that $|\langle \theta \rangle| = r$.

Lemma 2.1. $\langle \theta + 1 \rangle = \langle \theta \rangle \times \langle \theta + \theta^{-1} \rangle$.

Proof. Let us show first that $\langle \theta^2 + 1 \rangle = \langle \theta + 1 \rangle$. Since p is primitive modulo r, an integer i exists such that $p^i \equiv 2 \ mod\ r$. Then $(\theta + 1)^{p^i} = \theta^2 + 1 (mod\ p, \Phi_r(\theta))$. Analogously an integer j exists such that $p^j \equiv 2^{-1} \ mod\ r$. Then we have $(\theta^2 + 1)^{p^j} = \theta + 1 (mod\ p, \Phi_r(\theta))$.

Now we show that $\langle\theta\rangle \cdot \langle\theta+\theta^{-1}\rangle = \langle\theta^2+1\rangle$. Indeed, $\theta(\theta+\theta^{-1}) = \theta^2+1$ and the inclusion $\langle\theta\rangle \cdot \langle\theta+\theta^{-1}\rangle \supseteq \langle\theta^2+1\rangle$ is obvious. As $\theta \in \langle\theta+1\rangle = \langle\theta^2+1\rangle$, $\theta^{-1}(\theta^2+1) = \theta+\theta^{-1} \in \langle\theta^2+1\rangle$ and we have the inclusion $\langle\theta\rangle \cdot \langle\theta+\theta^{-1}\rangle \subseteq \langle\theta^2+1\rangle$.

To prove that the intersection of $\langle\theta\rangle$ and $\langle\theta+\theta^{-1}\rangle$ equals to the trivial subgroup, consider the automorphism σ of the field $F_p(\theta)$, which sends θ to θ^{-1}. For every element $a \in F_p(\theta)$ we take $t(a) = a \cdot (\sigma(a))^{-1}$. It is clear that $t(ab) = t(a)t(b)$ and $t(a^i) = [t(a)]^i$. Then it is easy to obtain $t((\theta+\theta^{-1})^u) = 1$ and $t(\theta^c) = \theta^{2c}$. Suppose $\theta^c = (\theta+\theta^{-1})^u$ for some integers c, u. Use for $\alpha = \theta^c$ and $\beta = (\theta+\theta^{-1})^u$ the fact that $\alpha = \beta$ implies $t(a) = t(b)$. Then $\theta^{2c} = 1$, and therefore c is divided by r and $\theta^c = 1$.

Hence, the result follows. □

As a consequence of Lemma 2.1, we have the following more precisely specified chain of subgroups:

$$\langle\theta\rangle \subset \langle\theta\rangle \times \left\langle\theta+\theta^{-1}\right\rangle = \langle\theta+1\rangle \subset \langle\theta-1\rangle \subset \langle\theta-1,\theta+2\rangle.$$

Theorem 2. *The Gauss period $\beta = \theta+\theta^{-1}$ has the multiplicative order larger than*

$$\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{r-2}\right)}{13(r-2)}$$

and this order divides $p^{(r-1)/2}-1$.

Proof. Since

$$(\theta+\theta^{-1})^{p^{(r-1)/2}-1} = (\theta^{p^{(r-1)/2}} + \theta^{-p^{(r-1)/2}})(\theta+\theta^{-1})^{-1} = (\theta^{-1}+\theta)(\theta+\theta^{-1})^{-1} = 1,$$

the multiplicative order of β divides $p^{(r-1)/2}-1$.The fact that the order of $\beta = \theta+\theta^{-1} = \theta^{-1}(\theta^2+1)$ is at least $U(r-2, p-1)$ follows from Theorem 1, part (a).

Since $p > r$, we have $r-2 < p$ and $U(r-2,p-1) = U(r-2)$. Then it follows from inequality (1) that the multiplicative order $L_1(r)$ of $\beta = \theta+\theta^{-1} = \theta^{-1}(\theta^2+1)$ satisfies the bound

$$L_1(r) \geq U(r-2,p-1) = U(r-2) > \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{r-2}\right)}{13(r-2)}.$$

□

We obtain from Lemma 2.1 and Theorem 2 the following explicit lower bound.

Corollary 2.1. $|\langle\theta+1\rangle| > \frac{r}{13(r-2)}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{r-2}\right)$.

Since $\langle\theta+1\rangle \subset \langle\theta-1\rangle$, the following result is clear.

Lemma 2.2. $|\langle\theta-1\rangle| \geq 2|\langle\theta+1\rangle|$.

Remark. *The order of element $\theta+1$ in the case $r = 5$ and $p \equiv 2 \mod r$ divides $2r(p+1)$, because $(\theta+1)^{p+1} = (\theta^p+1)(\theta+1) = (\theta^2+1)(\theta+1) = \theta^3+\theta^2+\theta+1 = -\theta^4$, and the order of $-\theta^4$ equals to $2r$. On the other hand, one can show that $(\theta-1)^{2r(p+1)} \neq 1$.*

Taking into account Corollary 2.1 and Lemma 2.2, we have the following lower bound.

Corollary 2.2. $|\langle\theta-1\rangle| > \frac{2r}{13(r-2)}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{r-2}\right)$.

Now we are ready to give the lower bound on the order of $\langle\theta-1,\theta+2\rangle$.

Theorem 3. $|\langle\theta-1,\theta+2\rangle| > \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\sqrt{r-3}\right)}{169(r-2)(r-3)}$.

Proof. Recall that the order of $F^*_{p^{r-1}}$ equals to $p^{r-1}-1 = (p^{(r-1)/2}-1)(p^{(r-1)/2}+1)$. The factors $p^{(r-1)/2}-1$ and $p^{(r-1)/2}+1$ have the greatest common divisor 2, since their sum equals to $2p^{(r-1)/2}$.

Consider the subgroup of $F^*_{p^{r-1}}$ generated by $\theta-1$ and $\theta+2$. This subgroup contains two subgroups: first one is generated by $\beta = \theta+\theta^{-1}$ (because $\langle\theta-1\rangle$ contains $\langle\theta+1\rangle$, and $\langle\theta+1\rangle$ contains $\langle\theta+\theta^{-1}\rangle$), and second one — by $\gamma = (\theta-2)^{p^{(r-1)/2}-1} = (\theta^{-1}-2)(\theta-2)^{-1}$.

According to Theorem 2, β has the order that divides $p^{(r-1)/2}-1$ and is at least

$$\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{r-2}\right)}{13(r-2)}.$$

As $2^2 \not\equiv 1 (mod\ p)$, according to Theorem 1, part (c) (if to put $e = 0, f = 1$), the γ has the order that divides $p^{(r-1)/2}+1$ and is at least $U((r-3)/2, p-1)$.

Construct the element

$$\delta = \begin{cases} \beta^2\gamma, & \text{if } \rho_2(p^{(r-1)/2}-1) = 2, \\ \beta\gamma^2, & \text{if } \rho_2(p^{(r-1)/2}+1) = 2. \end{cases}$$

Obviously the group $\langle\theta-1,\theta+2\rangle$ contains the subgroup generated by δ. If

$$\rho_2(p^{(r-1)/2}-1) = 2,$$

then $(p^{(r-1)/2}-1)/2$ is odd and coprime with $p^{(r-1)/2}+1$. Clearly the order of β^2 is a divisor of $(p^{(r-1)/2}-1)/2$. Hence, in this case, we have the following direct product of subgroups $<\delta> = <\beta^2> \times <\gamma>$.

If $\rho_2(p^{(r-1)/2}+1) = 2$, then $(p^{(r-1)/2}+1)/2$ is odd and coprime with $p^{(r-1)/2}-1$. Clearly the order of γ^2 is a divisor of $(p^{(r-1)/2}+1)/2$. Hence, in this case, we have the following direct product of subgroups $<\delta> = <\beta> \times <\gamma^2>$.

In both cases, the order of δ is the product of orders of β and γ divided by 2.

Since $(r-3)/2 < p$, we have $U((r-3)/2, p-1) = U((r-3)/2)$. Applying to $U((r-3)/2)$ the inequality (1), we obtain that the multiplicative order $L_2(r)$ of δ satisfies the bound

$$L_2(r) \geq \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{r-2}\right)}{13(r-2)} \cdot U((r-3)/2)/2$$
$$> \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{r-2}\right)}{13(r-2)} U((r-3)/2)/2 > \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\sqrt{r-3}\right)}{169(r-2)(r-3)}.$$

This finishes the proof. □

REFERENCES

[1] Agrawal M., Kayal N., Saxena N. *PRIMES is in P*. Annals of Mathematics 2004, **160** (2), 781–793. doi: 10.4007/annals.2004.160.781

[2] Ahmadi O., Shparlinski I.E., Voloch J.F. *Multiplicative order of Gauss periods*. Intern. J. Number Theory 2010, **6** (4), 877–882. doi:10.1142/S1793042110003290

[3] Bernstein D.J. *Proving primality in essentially quartic random time*. Math. Comp. 2007, **76** (257), 389–403.

[4] Granville A. *It is easy to determine whether a given integer is prime*. Bull. Amer. Math. Soc. 2005, **42** (1), 3–38. doi:10.1090/S0273-0979-04-01037-7

[5] Lenstra H.W. Jr., Pomerance C. *Remarks on Agrawal's conjecture*. In: Proc. ARCC workshop "Future directions in algorithmic number theory", Palo Alto, USA, March 24–28, 2003, The American Institute of Mathematics. http://www.aimath.org/WWN/primesinp/primesinp.pdf

[6] Maróti A. *On elementary lower bounds for the partition function*. Integers: Electronic J. Comb. Number Theory 2003, **3** (A10).

[7] Popovych R. *A note on Agrawal conjecture*. Cryptology ePrint Archive 2009. http://eprint.iacr.org/2009/008

[8] Popovych R. *Elements of high order in finite fields of the form $F_q[x]/\Phi_r(x)$*. Finite Fields Appl. 2012, **18** (4), 700-710. doi:10.1016/j.ffa.2012.01.003

Received 10.01.2013

Попович Р. *Нижні оцінки для порядків підгруп, пов'язаних з гіпотезою Агравала* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 310–314.

Отримано нижні оцінки для мультиплікативних порядків підгруп скінченого поля, пов'язаних з алгоритмом доведення простоти числа.

Ключові слова і фрази: нижні оцінки, скінченне поле, мультиплікативний порядок.

Попович Р. *Нижние оценки для порядков подгрупп, связанных с гипотезой Агравала* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 310–314.

Получены нижние оценки для порядков подгрупп конечного поля, связанных с алгоритмом доказательства простоты числа.

Ключевые слова и фразы: нижние оценки, конечное поле, мультипликативный порядок.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.98

PRONSKA N.I.

RECONSTRUCTION OF ENERGY-DEPENDENT STURM-LIOUVILLE EQUATIONS FROM TWO SPECTRA. II

Pronska N.I. *Reconstruction of energy-dependent Sturm-Liouville equations from two spectra. II*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 315–325.

We study the problem of reconstruction of singular energy-dependent Sturm-Liouville equation from two spectra. We suggest a new method of solving this inverse problem by establishing its connection with the problem of reconstruction from one spectrum and the set of norming constants.

Key words and phrases: inverse problems, Sturm-Liouville equations, energy-dependent potentials, singular potentials.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, L'viv, Ukraine.
E-mail: nataliya.pronska@gmail.com

INTRODUCTION

The main object of our study is energy-dependent Sturm-Liouville equation

$$-y'' + qy + 2\lambda py = \lambda^2 y \tag{1}$$

on $(0,1)$; here $\lambda \in \mathbb{C}$ is the spectral parameter, p is a real-valued function in $L_2(0,1)$ and q is a real-valued distribution in the Sobolev space $W_2^{-1}(0,1)$, i.e. $q = r'$ with a real-valued $r \in L_2(0,1)$. We consider this equation under two types of boundary conditions: the Dirichlet ones

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{2}$$

and the so-called mixed conditions

$$y(0) = y^{[1]}(1) + Hy(1) = 0,$$

where $H \in \mathbb{R}$ is some constant and $y^{[1]} := y' - ry$ is a quasi-derivative of the function y used in the regularization procedure due to Savchuk and Shkalikov (see [19, 20] and the next section for details). Since primitive of q is defined only up to an additive constant, by replacing r with $r - H$ we reduce the above mixed boundary conditions to the following ones:

$$y(0) = y^{[1]}(1) = 0. \tag{3}$$

In what follows, we shall denote by $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$ the spectral problems (1), (2) and (1), (3) respectively. Our main aim in this paper is to solve the inverse problem of reconstructing the potentials p and r given the spectra of $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 34A55, Secondary 34B07, 34B24, 34B30, 34L40, 47E05.

The spectral problem under study often arise in classical and quantum mechanics. In particular, the equations of the form (1) are used in modelling of the motion of relativistic massless particles, in describing the interactions of colliding spinless particles, in modelling of the mechanical system vibrations in viscous media etc.

The spectral equation (1) was considered on the line and studied in the context of inverse scattering problems (see, e.g. [1, 7, 9, 10, 12, 18, 21], and [5] for a more extensive reference list). The inverse spectral problems for (1) with $p \in W_2^1(0,1)$ and $q \in L_2(0,1)$ and with Robin boundary conditions were discussed by M. Gasymov and G. Guseinov in their short paper [3] of 1981 containing no proofs. Such problems were also considered in [2, 4, 13, 14, 22], but only Borg-type uniqueness results were obtained therein.

We studied the inverse problems of reconstruction of (1) with potentials $p \in L_2(0,1)$ and $q \in W_2^{-1}(0,1)$ from the spectra of $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$ in [17] and from one spectrum and the set of norming constants in [5]. In this paper, we suggest another method of reconstructing (1) from two spectra that exploits connection of this problem with the problem of reconstructing (1) from one spectrum and the set of norming constants.

Namely, given two sequences $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\mu}$, which are supposed to be the spectra of $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$ with the sought potentials p and $q = r'$, we construct another sequence, which turns out to consist of the norming constants for $\mathscr{L}_D(p,r)$. Then, using the results of [5], we reconstruct the potentials p and q of (1) such that $\boldsymbol{\lambda}$ is the spectrum of (1), (2) with these p and q. Next we show that the primitive r of q can be chosen uniquely so that the spectrum of $\mathscr{L}_M(p,r)$ coincides with the given sequence $\boldsymbol{\mu}$. The main result of the paper is the existence and uniqueness theorem giving a complete characterisation of the spectra of the problems $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$ as well as the reconstruction algorithm.

1 PRELIMINARIES AND MAIN RESULTS

In this section we introduce the necessary definitions and formulate the main results of the paper. To start with, consider the differential expression

$$\ell(y) = -y'' + qy$$

and recall that $q = r'$ is a real-valued distribution from $W_2^{-1}(0,1)$. Therefore we need to define the action of $\ell(y)$ more rigourously. To do this we use the regularization procedure due to Savchuk and Shkalikov (see [19, 20]) based on the notion of quasi-derivatives. Namely, for every absolutely continuous function y we denote by $y^{[1]} := y' - ry$ its quasi-derivative and define $\ell(y)$ as

$$\ell(y) = -(y^{[1]})' - ry^{[1]} - r^2 y$$

on the domain

$$\operatorname{dom} \ell = \{y \in AC(0,1) \mid y^{[1]} \in AC[0,1],\ \ell(y) \in L_2(0,1)\}.$$

It is straightforward to see that so defined $\ell(y)$ coincides with $-y'' + qy$ in the distributional sense.

Now we can recast the spectral equation (1) as

$$\ell(y) + 2\lambda py = \lambda^2 y. \tag{4}$$

Then a number $\lambda \in \mathbb{C}$ is called an *eigenvalue* of the problem $\mathscr{L}_D(p,r)$ (resp. $\mathscr{L}_M(p,r)$) if equation (4) possesses a nontrivial solution satisfying the boundary conditions (2) (resp. (3)). This solution is then called an *eigenfunction* of the problem $\mathscr{L}_D(p,r)$ (resp. $\mathscr{L}_M(p,r)$) corresponding to λ.

In this paper we study the following inverse spectral problem:

(IP1) Given the spectra of the problems $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$, determine the potentials p and r.

A complete solution of this problem is only possible under some extra assumption, which we formulate further. Denote by T_j, $j = 1,2$, the operator pencils defined via

$$T_j(\lambda)y := \ell(y) + 2\lambda p - \lambda^2 y$$

on the λ-independent domains

$$\operatorname{dom} T_1 := \{y \in \operatorname{dom} \ell \mid y(0) = y(1) = 0\},$$
$$\operatorname{dom} T_2 := \{y \in \operatorname{dom} \ell \mid y(0) = y^{[1]}(1) = 0\}.$$

Note that the spectra of the problems $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$ coincide with those of the pencils T_1 and T_2 respectively. Our standing assumption is the following:

(A) there is a $\mu_* \in \mathbb{R}$ such that the operator $T_2(\mu_*)$ is positive.

Under this assumption all the eigenvalues of both problems $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$ are real and simple (see [16]). Moreover, they can be enumerated in increasing order as λ_n and μ_n so that the pair of sequences $((\lambda_n),(\mu_n))$ forms an element of the set SD_1 defined below (see [17]).

Definition 1. *We denote by SD_1 the family of all pairs $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ of increasing sequences $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, and $\boldsymbol{\mu} := (\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ of real numbers satisfying the following conditions:*

(i) asymptotics: *there is an $h \in \mathbb{R}$ such that*

$$\lambda_n = \pi n + h + \tilde\lambda_n, \quad \mu_n = \pi\left(n - \tfrac{1}{2}\right) + h + \tilde\mu_n, \tag{5}$$

where $(\tilde\lambda_n)$ is a sequence in $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$ and $(\tilde\mu_n)$ is from $\ell_2(\mathbb{Z})$;

(ii) almost interlacing:

$$\mu_k < \lambda_k < \mu_{k+1} \quad \text{for every } k \in \mathbb{Z}^*. \tag{6}$$

Remark 1. *(a) If the eigenvalues λ_n of $\mathscr{L}_D(p,r)$ and μ_n of $\mathscr{L}_M(p,r)$ are ordered so that (i) and (ii) of the above definition hold, then the number μ_* in assumption (A) satisfies the inequalities $\mu_0 < \mu_* < \mu_1$, see [16]. Moreover, then assumption (A) holds with every μ_* from (μ_0,μ_1).*

(b) For the most of the paper, it will be convenient to assume that μ_* in (A) is zero. If this does not hold, we can shift the spectral parameter via $\lambda = \hat\lambda + \mu_*$; then the spectral equation (1) can be recast as

$$-y'' + \hat q y + 2\hat\lambda \hat p y = \hat\lambda^2 y$$

with the new potentials $\hat{p} := p - \mu_*$ and $\hat{q} := q + 2\mu_* p - \mu_*^2$. Moreover, choosing the primitive $\hat{r} := r - \int_x^1 (2\mu_* p - \mu_*^2)$ of $\hat{q}$ so that $(\hat{r} - r)(1) = 0$ and introducing the corresponding quasi-derivative $y^{[1]} := y' - \hat{r}y$, we see that the boundary conditions (2) and (3) remain unchanged. Now if λ_n (resp. μ_n) are eigenvalues of the problem $\mathscr{L}_D(p,r)$ (resp. $\mathscr{L}_M(p,r)$), then $\hat{\lambda}_n := \lambda_n - \mu_*$ (resp. $\hat{\mu}_n := \mu_n - \mu_*$) are eigenvalues of the problem $\mathscr{L}_D(\hat{p},\hat{r})$ (resp. $\mathscr{L}_M(\hat{p},\hat{r})$), while the eigenfunctions for the corresponding eigenvalues are the same. In particular, the problems $\mathscr{L}_D(\hat{p},\hat{r})$ and $\mathscr{L}_M(\hat{p},\hat{r})$ satisfy assumption (A) with $\mu_* = 0$. Having $\hat{p}$, $\hat{q}$ and $\hat{r}$ we can find p, q and r by formulae

$$p = \hat{p} + \mu_*, \quad q = \hat{q} - 2\mu_* p - \mu_*^2, \quad r = \hat{r} + \int_x^1 (2\mu_*\hat{p} + \mu_*^2). \tag{7}$$

In view of the above remark, without loss of generality we can work under a simplifying assumption

(A0) the operator $T_2(0)$ is positive.

However, the main results of the paper will be proved under the general assumption (A).

Clearly, under assumption (A0) the eigenvalues of $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$ can be enumerated in increasing order as λ_n and μ_n so that the pair of sequences $((\lambda_n),(\mu_n))$ forms an element of the set SD_1 with $\mu_0 < 0 < \mu_1$.

In this paper we establish connection between the inverse problem (IP1) and the inverse problem (IP2) formulated below; it was already studied in [5]. Namely, for an eigenvalue λ of the problem $\mathscr{L}_D(p,r)$, denote by y the corresponding eigenfunction normalized by the initial conditions $y(0) = 0$ and $y^{[1]}(0) = 1$. The quantity

$$\alpha := 2\lambda^2 \int_0^1 y^2(t)dt - 2\lambda \int_0^1 p(t)y^2(t)dt \tag{8}$$

is called the *norming constant* corresponding to the eigenvalue λ. Then (λ,α) is called the *(spectral) eigenpair* of $\mathscr{L}_D(p,r)$. The *spectral data* $\mathbf{sd}(p,r)$ of the problem $\mathscr{L}_D(p,r)$ is the set of all eigenpairs (λ,α) of $\mathscr{L}_D(p,r)$.

The inverse spectral problem (IP2) reads as follows:

(IP2) Given the spectral data $\mathbf{sd}(p,r)$ of $\mathscr{L}_D(p,r)$, determine the potentials p and r.

The results of [5] imply that under assumption (A0) the spectral data $\mathbf{sd}(p,r)$ form an element of the set SD_2 defined below.

Definition 2. *We denote by SD_2 the family of all sets $\{(\lambda_n,\alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$, which consist of pairs (λ_n,α_n) of real numbers satisfying the following properties:*

(i) λ_n are nonzero, strictly increase with $n \in \mathbb{Z}^*$, and have the representation $\lambda_n = \pi n + h + \tilde{\lambda}_n$ for some $h \in \mathbb{R}$ and a sequence $(\tilde{\lambda}_n)$ in $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$;

(ii) $\alpha_n > 0$ for all $n \in \mathbb{Z}^*$ and the numbers $\tilde{\alpha}_n := \alpha_n - 1$ form an $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$-sequence.

The main results of [5] are the following:

Theorem A (Uniqueness). *Under assumption (A0), the potentials p and $q = r'$ of equation* (1) *are uniquely determined by its spectral data $\mathbf{sd}(p,r)$.*

Theorem B (Existence). *For every $\mathbf{sd} \in SD_2$, there exist real-valued p from $L_2(0,1)$ and q from $W_2^{-1}(0,1)$ such that $\mathbf{sd}$ is the spectral data for the problem $\mathscr{L}_D(p,r)$ with the potentials p and with r a primitive of q, i.e. $\mathbf{sd} = \mathbf{sd}(p,r)$.*

Note that neither the spectrum of $\mathscr{L}_D(p,r)$ nor the set of norming constants depend on the particular choice of the primitive r of q. That is why the results of [5] guarantee unique reconstruction of q but leave r determined up to an additive constant. However, the boundary conditions (3) for the problem $\mathscr{L}_M(p,r)$ do depend on the choice of r, and we shall show that r is determined uniquely in the inverse problem (IP1).

To investigate the connection between (IP1) and (IP2) we use the characteristic functions of the problems $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$. Denote by $y(x,z)$ the solution of (4) with z instead of λ and subject to the initial conditions $y(0) = 0$, $y^{[1]}(0) = 1$. Then λ is an eigenvalue of the problem $\mathscr{L}_D(p,r)$ if and only if it is a zero of its *characteristic function* $\varphi(z) := y(1,z)$. Analogously a number μ is an eigenvalue of the problem $\mathscr{L}_M(p,r)$ if and only if μ is a zero of the corresponding *characteristic function* $\psi(z) := y^{[1]}(1,z)$. It was shown in [15] that the functions φ and ψ can be written in factorized form in terms of their zeros, namely

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \text{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\lambda_n - \lambda}{\pi n}, & \text{if } p_0 \neq \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^l \ \text{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\lambda_n - \lambda}{\pi n}, & \text{if } p_0 = \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{9}$$

$$\psi(\mu) = \begin{cases} -\text{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\mu_n - \mu}{\pi(n+1/2)}, & \text{if } p_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{l+1}(\mu_0 - \mu)\text{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\mu_n - \mu}{\pi n}, & \text{if } p_0 = \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{10}$$

where $p_0 = \int_0^1 p$. The link between (IP1) and (IP2) is given by (9), (10) and the following formula, which relates the characteristic functions (and so the spectra) of $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$ and the norming constants of $\mathscr{L}_D(p,r)$ (see [16]):

$$\alpha_n = \lambda_n \dot{\varphi}(\lambda_n)\psi(\lambda_n). \tag{11}$$

In the next section we shall prove the following theorem:

Theorem 1. *Given the pair of sequences $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ from SD_1 with $\mu_0 < 0 < \mu_1$, construct $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ via* (9), (10) *and* (11). *Then the α_n are positive and the sequence $(\alpha_n - 1)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ belongs to $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$.*

As a result, the set of pairs $\{(\lambda_n,\alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$, with given numbers λ_n and the numbers α_n constructed as in (11), forms an element of SD_2. Therefore by Theorems A and B there exist unique real-valued $p \in L_2(0,1)$ and $q \in W_2^{-1}(0,1)$ such that $\{(\lambda_n,\alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ coincides with the spectral data $\mathbf{sd}(p,r)$, with every primitive r of q. Then we show that this primitive r can be uniquely chosen as to make μ_n the eigenvalues of $\mathscr{L}_M(p,r)$. This will lead to the main result of the paper (cf. [17]):

Theorem 2. *Assume that a pair $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ of sequences of real numbers is an element of SD_1. Then there exist unique real-valued $p,r \in L_2(0,1)$ such that $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\mu}$ are the spectra of the problems $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$. In particular, the singular potential q in* (1) *is equal to r'.*

2 Connection between (IP1) and (IP2)

2.1 Proof of Theorem 1

This subsection is devoted to the proof of Theorem 1, which establishes connection between (IP1) and (IP2).

Suppose we have two sequences $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ and $\boldsymbol{\mu} := (\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ with $\mu_0 < 0 < \mu_1$, which form an element $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ of the set SD_1. Set $\lambda_0 := 0$, and denote by $\boldsymbol{\lambda}^*$ the sequence $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, which is $\boldsymbol{\lambda}$ augmented with λ_0. Then $\boldsymbol{\lambda}^*$ and $\boldsymbol{\mu}$ strictly interlace. By means of these sequences we construct the functions

$$s_1(z) := \begin{cases} z\text{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\lambda_n - z}{\pi n}, & \text{if } h \neq \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^l z\ \text{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\lambda_n - z}{\pi n}, & \text{if } h = \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{12}$$

$$c(z) := \begin{cases} -\text{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\mu_n - z}{\pi\,(n+1/2)}, & \text{if } h \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{l+1}(\mu_0 - z)\text{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\mu_n - z}{\pi n}, & \text{if } h = \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{13}$$

where h is the number in the asymptotics (i) of Definition 1.

Observe that $\boldsymbol{\lambda}^*$ is the sequence of zeros of s_1 and $\boldsymbol{\mu}$ is that of c. The results of [6] imply that there exist functions f and g from $L_2(0,1)$ such that

$$s_1(z) = \sin(z-h) + \int_0^1 f(t)e^{iz(1-2t)}dt \quad \text{and} \quad c(z) = \cos(z-h) + \int_0^1 g(t)e^{iz(1-2t)}dt. \tag{14}$$

Note that

$$\dot{s_1}(\lambda_n) = \cos(\lambda_n - h) + \int_0^1 f(t)i(1-2t)e^{i\lambda_n(1-2t)}dt.$$

Next put $s(z) := \frac{s_1(z)}{z}$; since λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, are zeros of s_1 we have $\dot{s}(\lambda_n) = \frac{\dot{s_1}(\lambda_n)}{\lambda_n}$ for every $n \in \mathbb{Z}^*$.

Now we shall prove the following auxiliary lemma.

Lemma 1. *Let F be a function from $L_2(0,1)$. Then the sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ with*

$$f_n := \int_0^1 F(t)e^{i\lambda_n(1-2t)}dt \tag{15}$$

belongs to $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Proof. Let us firstly make a change of variables $u := 1-2t$ in the integral of the righthand side of (15). We obtain

$$f_n := \int_{-1}^1 G(u)e^{i\omega_n u}du,$$

where $G(u) = \frac{1}{2}F(\frac{1-u}{2})e^{ihu}$ is the function from $L_2(-1,1)$ and $\omega_n = \pi n + \tilde{\lambda}_n$. To complete the proof it is enough to show that the system $e^{i\omega_n u}$ forms a Riesz basis in $L_2(-1,1)$; then f_n are the Fourier coefficients of G relative to the system $e^{i\omega_n u}$ and so form a sequence from $\ell_2(\mathbb{Z})$ (see e.g. [23, Ch. 1]).

Note firstly that the system $\{e^{i\pi n u}\}$ is an orthogonal basis in $L_2(-1,1)$. One can find a constant $L < \pi/4$ and a sufficiently large N such that $|\tilde{\lambda}_n| < L$ for all n, $|n| > N$. Then Kadec's 1/4-Theorem (see [23, Ch. 1], [8]) yields that the system $\{e^{i\tilde{\omega}_n u}\}$ with

$$\tilde{\omega}_n = \begin{cases} \pi n + \tilde{\lambda}_n, & |n| > N, \\ \pi n, & |n| \le N, \end{cases}$$

forms a Riesz basis. It remains to observe that the sequence (ω_n) is obtained from $(\tilde{\omega}_n)$ by changing a finite number of elements. Theorems 3.11 and 1.12 of [23] imply that the system $\{e^{i\omega_n u}\}$ is a Riesz basis. □

The above lemma yields that

$$\begin{aligned} \dot{s_1}(\lambda_n) &= (-1)^n \cos\tilde{\lambda}_n + \int_0^1 f(t)i(1-2t)e^{i\lambda_n(1-2t)}dt = (-1)^n(1+s_n), \\ c(\lambda_n) &= (-1)^n \cos\tilde{\lambda}_n + \int_0^1 g(t)e^{i\lambda_n(1-2t)}dt = (-1)^n(1+c_n) \end{aligned} \tag{16}$$

with ℓ_2-sequences $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ and $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Define the sequence $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ as follows

$$\alpha_n := \lambda_n \dot{s}(\lambda_n)c(\lambda_n) = \dot{s_1}(\lambda_n)c(\lambda_n). \tag{17}$$

Then (16) implies that $\alpha_n = (-1)^n(1+s_n)(-1)^n(1+c_n) = 1 + \tilde{\alpha}_n$ with ℓ_2-sequence $(\tilde{\alpha}_n)$.

Since the sequences $\boldsymbol{\lambda}^*$ and $\boldsymbol{\mu}$ interlace a straightforward analysis of definitions (12), (13) and formula (17) gives that all α_n, $n \in \mathbb{Z}^*$, are of the same sign and thus are positive thus finishing the proof of Theorem 1.

2.2 Solution of (IP2)

Theorem 1 together with Theorems A and B yields that for the given sequence $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ and the constructed $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ we can uniquely determine potentials p and q such that the problem $\mathscr{L}_D(p,r)$ with r an arbitrary primitive of q has $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ as its spectrum and $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ as the corresponding norming constants.

From [15] we know that the shift h in the asymptotics (5) of eigenvalues of $\mathscr{L}_D(p,r)$ equals to $p_0 = \int_0^1 p$.

2.3 Solution of (IP1)

Now we show that the potentials p and q constructed in the previous subsection also provide a solution to the (IP2). Namely, we shall show that there exists a primitive r of q such that μ_n, $n \in \mathbb{Z}$, are all the eigenvalues of the problem $\mathscr{L}_M(p,r)$.

To start with, note that a primitive r of q is determined up to an additive constant. We choose r in the following way. Let $y(x,\mu_0)$ be the solution of the equation (1) with μ_0 instead of λ satisfying the initial condition $y(0,\mu_0) = 0$. Then $y(1,\mu_0)$ is not equal to 0 as μ_0 is not in the spectrum of $\mathscr{L}_D(p,r)$. This allows us to choose r uniquely so that $y^{[1]}(1,\mu_0) = 0$. Then μ_0 is an eigenvalue of the problem $\mathscr{L}_M(p,r)$ with this fixed r. Denote by ν_n, $n \in \mathbb{Z}$, the eigenvalues of $\mathscr{L}_M(p,r)$ enumerated in increasing order so that $\nu_0 = \mu_0$.

Lemma 2. $\nu_n = \mu_n$ *for all* $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. Recall that the eigenvalues ν_n of $\mathscr{L}_M(p,r)$ satisfy the asymptotics $\nu_n = \pi(n-1/2) + p_0 + \tilde{\nu}_n$ with an ℓ_2-sequence $(\tilde{\nu}_n)$ and that the corresponding characteristic function ψ is given by (10) with ν_n instead of μ_n. The function ψ can be represented in an integral form, (see [6, 15])

$$\psi(z) = \cos(z-p_0) + \int_0^1 g_1(t)e^{iz(1-2t)}dt \tag{18}$$

with some $g_1 \in L_2(0,1)$. We are going to show that ψ coincides with the function c of (13). Since ν_n, $n \in \mathbb{Z}$, are zeros of ψ and μ_n, $n \in \mathbb{Z}$, are those of c, this will finish the proof.

Suppose, on the contrary, that $\psi \neq c$, i.e., that the function $\hat{\psi} := \psi - c$ is not identically zero. On account of the equality $h = p_0$ the representations (14) and (18) for the functions c and ψ give that

$$\hat{\psi}(z) = \int_0^1 (g_1(t) - g(t)) e^{iz(1-2t)} dt$$

and so, by a refined version of the Riemann-Lebesgue lemma [11, Lemma 1.3.1],

$$\hat{\psi}(z) = o(e^{|\operatorname{Im} z|}), \quad |z| \to \infty. \tag{19}$$

Taking (9) and the equality $h = p_0$ into account, we observe that $s(z)$ defined as $s_1(z)/z$ with s_1 of (12) coincides with the characteristic function φ of the problem $\mathscr{L}_D(p,r)$. Comparing the construction (17) of α_n and the relation (11) for the norming constants of $\mathscr{L}_D(p,r)$, we conclude that $\dot{s}(\lambda_n)\psi(\lambda_n) = \dot{s}(\lambda_n)c(\lambda_n)$, $\quad n \in \mathbb{Z}^*$. As the sequence $\boldsymbol{\lambda}$ strictly increases, each zero of s is simple and so $\dot{s}(\lambda_n) \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Therefore $c(\lambda_n) = \psi(\lambda_n)$ or equivalently $\hat{\psi}(\lambda_n) = 0$ for every $n \in \mathbb{Z}^*$. Clearly, $c(\mu_0) = \psi(\mu_0) = 0$ giving that $\hat{\psi}(\mu_0) = 0$. Hence $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}^*} \cup \{\mu_0\}$ are zeros of the function $\hat{\psi}(z)$.

Let us show that $\hat{\psi}$ possesses no other zeros. Denote by $n(t)$ the number of zeros of $\hat{\psi}$ in the disk $|z| \leq t$; then, in view of (19), the Jensen's formula gives

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt \leq \frac{2r}{\pi} + C_1 \tag{20}$$

with some constant $C_1 \in \mathbb{R}$. If $\hat{\psi}$ possessed other zeros apart from $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}^*} \cup \{\mu_0\}$, then the asymptotics of λ_n would guarantee that there exists $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ and N sufficiently large such that for every $l \geq N$ $n(\pi(l+\varepsilon)) \geq 2l + 2$. Put $t_l := \pi(l + \varepsilon)$ and use Stirling's approximation of the Euler gamma-function to obtain

$$\begin{aligned}\int_{t_m}^{t_{n+1}} \frac{n(t)}{t} dt &\geq \sum_{l=m}^{n} (2l+2) \log \frac{t_{l+1}}{t_l} = (2n+2) \log t_{n+1} - 2 \sum_{l=m}^{n} \log t_l - 2m \log t_m \\ &\geq (2n+2) \log \frac{t_{n+1}}{\pi} - 2 \log \Gamma\left(\frac{t_{n+1}}{\pi}\right) + C_2 \geq \frac{2t_{n+1}}{\pi} + (1 - 2\varepsilon) \log \frac{t_{n+1}}{\pi} + C_3\end{aligned}$$

with some constants C_2 and C_3. This estimate contradicts (20) and thus shows that $\hat{\psi}$ has no other zeros besides $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}^*} \cup \{\mu_0\}$.

The function $\hat{\psi}$ is of exponential type less than or equal to 1. Using this and the Hadamard factorization theorem, we obtain that

$$\hat{\psi}(z) = e^{Az+B} \left(1 - \frac{z}{\mu_0}\right) \text{V.p.} \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n}}$$

with some constants A and B. Since

$$\text{V.p.} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{-n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{\lambda_n \lambda_{-n}} \cdot \frac{\lambda_n + \lambda_{-n}}{\pi^2 n^2},$$

with absolutely convergent series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n + \lambda_{-n}}{\pi^2 n^2}$ and uniformly bounded sequence $\left(\frac{\pi^2 n^2}{\lambda_n \lambda_{-n}}\right)$, the series $\sum \frac{z}{\lambda_n}$ is convergent. Therefore,

$$\hat{\psi}(z) = e^{A'z+B} \left(1 - \frac{z}{\mu_0}\right) \text{V.p.} \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)$$

with a suitable constant A'.

Let us now fix $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ and take z of the form $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$. By (19),

$$\frac{\hat{\psi}(z)}{\sin(z-h)} \to 0, \quad \rho \to \infty. \tag{21}$$

Recall (see e.g. [23, Ch.2]) that the function $\sin(z - h)$ can be factorized as follows

$$\sin(z-h) = (z-h) \text{V.p.} \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\pi n + h - z}{\pi n},$$

so that

$$\frac{\hat{\psi}(z)}{\sin(z-h)} = e^{A'z+B} \frac{\mu_0 - z}{(z-h)\mu_0} \text{V.p.} \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\pi n}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_n - z}{\pi n + h - z}.$$

By Lemma 3 of [15], the product $\text{V.p.} \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\pi n}{\lambda_n}$ is convergent and, by Lemma 4 of [15], the product $\text{V.p.} \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\lambda_n - z}{\pi n + h - z}$ converges to 1 as $\rho \to \infty$ and $\theta \neq 0, \pi$. In view of (21), this means that $e^{A'z+B}$ converges to 0 as $\rho \to \infty$. But this is impossible; the contradiction derived shows that our assumption that $\hat{\psi} \not\equiv 0$ is false. Therefore $\hat{\psi} \equiv 0$ and $\nu_n = \mu_n$ for all $n \in \mathbb{Z}$. The proof is complete. □

3 PROOF OF MAIN RESULTS

In this section we turn to assumption (A) and proof Theorem 2 in the case of arbitrary $\mu_* \in \mathbb{R}$. Then we formulate a reconstruction algorithm.

3.1 Proof of Theorem 2

Given $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in SD_1$, we firstly put $\mu_* := (\mu_0 + \mu_1)/2$ and shift the sequences $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\mu}$ by $-\mu_*$ to obtain new sequences $\hat{\boldsymbol{\lambda}} := (\hat{\lambda}_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ and $\hat{\boldsymbol{\mu}} := (\hat{\mu}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ from SD_1 with $\hat{\mu}_0 < 0 < \hat{\mu}_1$. To prove the theorem it is enough to show that for the sequences $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ and $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ there exist unique real-valued $\hat{p}$ and $\hat{r}$ from $L_2(0,1)$ such that $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ is the spectrum of $\mathscr{L}_D(\hat{p}, \hat{r})$ and $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ is that of $\mathscr{L}_M(\hat{p}, \hat{r})$. Then by formulae (7) with $\mu_* = (\mu_0 + \mu_1)/2$ we can uniquely determine potentials p and r from $\hat{p}$ and $\hat{r}$ such that $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\mu}$ are the spectra of problems $\mathscr{L}_D(p,r)$ and $\mathscr{L}_M(p,r)$ respectively.

By means of sequences $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ and $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ construct the functions s_1 and c by formulae (12) and (13) and then the sequence (α_n) by (17). Due to Theorem 1, the set of pairs $\mathbf{sd} = \{(\hat{\lambda}_n, \alpha_n)\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ with the given $\hat{\lambda}_n$ and the constructed α_n belongs to SD_2. Then, using Theorem B, we construct potentials $\hat{p}$ and $\hat{q}$ such that $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ is the spectrum of $\mathscr{L}_D(\hat{p}, \hat{r})$ with the constructed $\hat{p}$ and any primitive $\hat{r}$ of $\hat{q}$. Next we fix the primitive $\hat{r}$ of $\hat{q}$ as explained in Subsection 2.3; then $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ is the spectrum of $\mathscr{L}_M(\hat{p}, \hat{r})$ by Lemma 2. This establishes the existence part.

To prove uniqueness we assume that there are two pairs of potentials $\hat{p}_1$, $\hat{r}_1$ and $\hat{p}_2$, $\hat{r}_2$ such that the sequence $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ is the spectrum of both problems $\mathscr{L}_D(\hat{p}_1, \hat{r}_1)$ and $\mathscr{L}_D(\hat{p}_2, \hat{r}_2)$ and the sequence $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ is the spectrum of both $\mathscr{L}_M(\hat{p}_1, \hat{r}_1)$ and $\mathscr{L}_M(\hat{p}_2, \hat{r}_2)$. This means that the norming constants of the problems $\mathscr{L}_D(\hat{p}_1, \hat{r}_1)$ and $\mathscr{L}_D(\hat{p}_2, \hat{r}_2)$ coincide as they are uniquely determined by two spectra $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ and $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ (see (11)). Then Theorem A implies that $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$ and $\hat{r}_1' = \hat{r}_2'$; in particular, $\hat{r}_1 - \hat{r}_2 = H$ with some constant H. To complete the proof it is enough to show that $H = 0$.

Observe that equations (1) for the problems $\mathscr{L}_M(\hat{p}_1, \hat{r}_1)$ and $\mathscr{L}_M(\hat{p}_2, \hat{r}_2)$ are the same. As a result, eigenfunctions for the both problems corresponding to the common eigenvalue $\hat{\mu}_0$ coincide as well; denote it by y. Then $(y' - \hat{r}_1 y)(1) = (y' - \hat{r}_2 y)(1) = 0$ or equivalently $Hy(1) = 0$. However $\hat{\mu}_0$ is not in the spectra of $\mathscr{L}_D(\hat{p}_1, \hat{r}_1)$ and $\mathscr{L}_D(\hat{p}_2, \hat{r}_2)$, hence $y(1) \neq 0$. Therefore $H = 0$ thus finishing the proof.

3.2 Reconstruction algorithm

To sum up we formulate the reconstruction algorithm.

Suppose we have a pair of sequences $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ from SD_1. Then we

1) put $\mu_* := (\mu_0 + \mu_1)/2$ and consider a new pair of sequences $(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ such that $\hat{\boldsymbol{\lambda}} := (\hat{\lambda}_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ with $\hat{\lambda}_n := \lambda_n - \mu_*$ and $\hat{\boldsymbol{\mu}} := (\hat{\mu}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ with $\hat{\mu}_n := \mu_n - \mu_*$;

2) augment $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ with $\hat{\lambda}_0 := 0$ and denote the new sequence by $\hat{\boldsymbol{\lambda}}^*$;

3) by means of sequences $\hat{\boldsymbol{\lambda}}^*$ and $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ construct the functions s_1 and c by formulae (12) and (13) with $\hat{\lambda}_n$ and $\hat{\mu}_n$ instead of λ_n and μ_n respectively;

4) construct the sequence (α_n) by (17) with $\hat{\lambda}_n$ instead of λ_n;

5) having the set of pairs $\mathbf{sd} = \{(\hat{\lambda}_n, \alpha_n)\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$, which, due to Theorem 1, belongs to SD_2, construct potentials $\hat{p}$ and $\hat{q}$ using the procedure of [5];

6) choose the primitive $\hat{r}$ of $\hat{q}$ as to make $\hat{\mu}_0$ an eigenvalue of $\mathscr{L}_M(\hat{p}, \hat{r})$;

7) determine potentials p and r from $\hat{p}$ and $\hat{r}$ using formulae (7).

Acknowledgement. The author is thankful to her supervisor Dr. Rostyslav Hryniv for constant attention to this work.

REFERENCES

[1] Aktosun T., van der Mee C. *Scattering and inverse scattering for the 1-D Schrödinger equation with energy-dependent potentials.* J. Math. Phys. 1991, **32** (10), 2786–2801. doi:10.1063/1.529070

[2] Guseĭnov G. Sh. Inverse spectral problems for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators on a finite interval. In: Spectral theory of operators and its applications, 7. "Ėlm", Baku, 1986, 51–101. (in Russian)

[3] Gasymov M.G., Guseĭnov G.Š. *Determination of a diffusion operator from spectral data.* Akad. Nauk Azerbaĭdzhan. SSR Dokl. 1981, **37** (2), 19–23.

[4] Guseĭnov I.M., Nabiev I.M. *An inverse spectral problem for pencils of differential operators.* Mat. Sb. 2007, **198** (11), 47–66. doi:10.1070/SM2007v198n11ABEH003897

[5] Hryniv R., Pronska N. *Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equation.* Inverse Problems 2012, **28** (8), 085008(21pp.). doi:10.1088/0266-5611/28/8/085008

[6] Hryniv R.O., Mykytyuk Y.V. *On zeros of some entire functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 2009, **361** (4), 2207–2223. doi:10.1090/S0002-9947-08-04714-4

[7] Jaulent M., Jean C. *The inverse problem for the one-dimensional Schrödinger equation with an energy-dependent potential. I.* Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) 1976, **25** (2), 105–118.

[8] Kadec M.I. *The exact value of the Paley-Wiener constant.* Sov. Math. Dokl 1964, **5**, 559–561.

[9] Kamimura Y. *Energy dependent inverse scattering on the line.* Differential Integral Equations 2008, **21** (11-12), 1083–1112.

[10] Maksudov F.G., Guseĭnov G.S. *On the solution of the inverse scattering problem for a quadratic pencil of one-dimensional Schrödinger operators on the whole axis.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 1986, **289** (1), 42–46.

[11] Marchenko V. A. Sturm-Liouville Operators and Their Applications. Naukova Dumka Publ., 1977.

[12] van der Mee C., Pivovarchik V. *Inverse scattering for a Schrödinger equation with energy dependent potential.* J. Math. Phys. 2001, **42** (1), 158–181. doi:10.1063/1.1326921

[13] Nabiev I.M. *The inverse spectral problem for the diffusion operator on an interval.* Mat. Fiz. Anal. Geom. 2004, **11** (3), 302–313.

[14] Nabiev I.M. *An inverse quasiperiodic problem for a diffusion operator.* Dokl. Akad. Nauk 2007, **415** (2), 168–170. doi:10.1134/S1064562407040126

[15] Pronska N. *Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of energy-dependent Sturm-Liouville operators.* Mat. Stud. 2013, **40** (1), 38–52.

[16] Pronska N. *Spectral properties of Sturm-Liouville equations with singular energy-dependent potentials.* Methods Funct. Anal. Topol. 2013, **19** (4), 327–345.

[17] Pronska N. *Reconstruction of energy-dependent Sturm-Liouville operators from two spectra.* Integral Equations and Operator Theory 2013, **76** (3), 403–419. doi:10.1007/s00020-013-2035-7

[18] Sattinger D.H., Szmigielski J. *Energy dependent scattering theory.* Differential Integral Equations 1995, **8** (5), 945–959.

[19] Savchuk A.M., Shkalikov A.A. *Sturm-Liouville operators with singular potentials.* Mat. Zametki 1999, **66** (6), 897–912. doi:10.1007/BF02674332

[20] Savchuk A.M., Shkalikov A.A. *Sturm-Liouville operators with distribution potentials.* Tr. Mosk. Mat. Obs. 2003, **64**, 159–212.

[21] Tsutsumi M. *On the inverse scattering problem for the one-dimensional Schrödinger equation with an energy dependent potential.* J. Math. Anal. Appl. 1981, **83** (1), 316–350. doi:10.1016/0022-247X(81)90266-3

[22] Yang C.-F., Guo Y.-X. *Determination of a differential pencil from interior spectral data.* J. Math. Anal. Appl. 2011, **375** (1), 284–293. doi:10.1016/j.jmaa.2010.09.011.

[23] Young R.M. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. Academic Press, 2001.

Received 03.09.2013

Пронська Н.І. *Відновлення енергозалежних рівнянь Штурма-Ліувілля за двома спектрами. II* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — C. 315–325.

Вивчається задача відновлення сингулярних енергозалежних рівнянь Штурма-Ліувілля за двома спектрами. Ми пропонуємо новий метод розв'язання цієї задачі, досліджуючи її зв'язок із задачею відновлення за одним спектром і множиною нормівних множників.

Ключові слова і фрази: обернені задачі, рівняння Штурма-Ліувілля, енергозалежні потенціали, сингулярні потенціали.

Пронська Н.И. *Восстановление уравнений Штурма-Лиувилля зависящих от энергии по двум спектрам. II.* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — C. 315–325.

Изучается задача восстановление сингулярного уравнения Штурма-Лиувилля зависящего от энергии по двум спектрам. Предложен новый метод решения этой обратной задачи, который использует ее связь с задачей восстановления по одному спектру и множеством нормирующих множителей.

Ключевые слова и фразы: обратные задачи, уравнения Штурма-Лиувилля, энергозависимые потенциалы, сингулярные потенциалы.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.95

Процах Н.П.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Процах Н.П. *Асимптотична поведінка розв'язку оберненої задачі для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 326–335.

Розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з невідомим, залежним від часу, множником правої частини цього рівняння. Знайдено умови, за яких узагальнений розв'язок задачі прямує до нуля при зростанні часової змінної.

Ключові слова і фрази: обернена задача, ультрапараболічне рівняння, узагальнений розв'язок.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: protsakh@ukr.net

Вступ

Ультрапараболічні рівняння вперше введені у праці [5] для опису неізотропних процесів. Пізніше їх застосовували до вивчення багатьох явищ механіки, біології, фізики, економіки [2, 7]. Вивченню задачі Коші, мішаних задач та властивостей їх розв'язків присвячені, зокрема, праці [2, 8, 10, 11, 12].

Обернені задачі пов'язані з пошуком причин явищ за відомими їх наслідками. З математичної точки зору це означає знаходження невідомих коефіцієнтів рівняння чи його правої частини за додаткових умов на розв'язок цього рівняння.

Існування та єдиність розв'язку обернених задач для параболічних, гіперболічних чи ультрапараболічних рівнянь встановлено, зокрема, у працях [1, 3, 4, 6, 9, 11, 14]. При цьому використовувалися: метод інтегральних рівнянь та принцип Шаудера [3, 4, 6], ітераційні методи [14], метод послідовних наближень [1, 11], метод напівгруп [9]. У праці [15] показано, що розв'язок оберненої задачі з невідомою правою частиною для параболічного рівняння спадає до нуля при зростанні часової змінної за певних умов на вихідні дані задачі.

У цій праці розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з невідомим, залежним від часу, множником правої частини цього рівняння. Встановлено умови, за яких розв'язок спадає до нуля при зростанні часової змінної. Зауважимо, що властивості розв'язків прямих мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь раніше вивчалися у працях [8, 12].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70, 35R30.

1 Основні позначення та функціональні простори

Нехай Ω і D — обмежені області відповідно в $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^l$ з межами $\partial\Omega \in C^1$ і $\partial D \in C^1$; $x \in \Omega$, $y \in D$, $t \in (0,T)$, де T — фіксоване число з інтервалу $(0,\infty)$, $Q_T = \Omega \times D \times (0,T)$, $G = \Omega \times D$.

Позначимо: $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$, $G_\xi = \{(x,y,t) : (x,y) \in G, t = \xi\}$, $\xi \in [0,T]$.

Введемо простори: $L^\infty(Q_T) := \{w : Q_T \to \mathbb{R};\ w$ — вимірна та існує така стала C, що $|w(x,y,t)| \leq C$ майже всюди на $Q_T\}$, $\|w; L^\infty(Q_T)\| = \inf\{C : |w(x,y,t)| \leq C$ майже всюди на $Q_T\}$; $L^2(G) := \{w : G \to \mathbb{R};\ w$ — вимірна, $\int_G |w(x,y)|^2\,dxdy < \infty\}$, $\|w; L^2(G)\| = \left(\int_G |w(x,y)|^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$; $L^2(0,T) := \{w : [0,T] \to \mathbb{R};\ w$ — вимірна, $\int_0^T |w(t)|^2 dt < \infty\}$, $\|w; L^2(0,T)\| = \left(\int_0^T |w(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$; $L^2(Q_T) := \{w : Q_T \to \mathbb{R};\ w$ — вимірна, $\int_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\,dx\,dy\,dt < \infty\}$, $\|w; L^2(Q_T)\| = \left(\int_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\,dxdydt\right)^{\frac{1}{2}}$; $W^{1,2}(\,\cdot\,)$ — множина всіх розподілів w, які разом зі своїми похідними першого порядку за всіма змінними належать до простору $L^2(\,\cdot\,)$, $\|w; W^{1,2}(\Omega)\| = \left(\int_\Omega [|w(x)|^2 + \sum_{i=1}^n |w_{x_i}(x)|^2]\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$; $\|w; W^{1,2}(0,T)\| = \left(\int_0^T [|w(t)|^2 + |w_t(t)|^2]\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$; $C^k(O)$ — простір k раз неперервно диференційовних функцій на O; $V(0,T; W(G)) := \{w : [0,T] \to W(G);\ \|w(\cdot,\cdot,t); W(G)\| \in V(0,T)\}$ (де V, W — банахові простори); $W_0^{1,2}(\Omega) := \{w : w \in W^{1,2}(\Omega),\ w|_{\partial\Omega} = 0\}$; $V_1(Q_T) := \{w :\ w,\ w_{x_i} \in L^2(Q_T), i = 1,\dots,n,\ w|_{\Sigma_T} = 0\}$; $V_2(G) := L^2(D; W_0^{1,2}(\Omega)) = \{w : D \to W_0^{1,2}(\Omega);\ \|w(\cdot,y); W_0^{1,2}(\Omega)\| \in L^2(D)\}$, $\|w; V_2(G)\| = \left(\int_G [|w(x,y)|^2 + \sum_{i=1}^n |w_{x_i}(x,y)|^2]\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$; $V_3(Q_T) := \{w : w, w_{x_i}, w_{y_j} \in L^2(Q_T), i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,l,\ w|_{S_T^1} = 0,\ w|_{\Sigma_T} = 0\}$. Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярний добуток між просторами $V_2^*(G)$ і $V_2(G)$.

Використовуватимемо такі нерівності:
"нерівність з ε":

$$|yz| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|y|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|z|^2, \quad \varepsilon, y, z \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0, \tag{1}$$

нерівність Фрідріхса:

$$\int_\Omega |v(x)|^2\,dx \leq \varkappa \int_\Omega \sum_{i=1}^n |v_{x_i}(x)|^2\,dx, \tag{2}$$

яка виконується для функцій $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, а стала $\varkappa$ залежить від Ω.

2 Формулювання задачі

В області Q_T розглянемо задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^l \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t)f_0(t) \tag{3}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in G, \tag{4}$$

крайовими умовами

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \qquad u|_{S_T^1} = 0 \tag{5}$$

та умовою перевизначення

$$\int_{G_t} K(x,y)u(x,y,t)\,dxdy = E(t), \qquad t \in [0,T], \tag{6}$$

де $u(x,y,t)$, $f_0(t)$ — невідомі функції, $S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i) < 0\}$, ν — одинична зовнішня нормаль до S_T, причому припускаємо, що виконується умова

(S): Існує така поверхня з додатною мірою Лебега $\Gamma_1 \subset \partial D \subset \mathbb{R}^{l-1}$, що $S_T^1 = \Omega \times \Gamma_1 \times (0,T)$.

Нехай також виконуються умови

(A): $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j = 1,\dots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, a_0 – додатна стала;

(C): $c \in C([0,T]; L^\infty(G))$, $c(x,y,t) \geq c_0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, c_0 — стала;

(E): $E \in W^{1,2}(0,T)$;

(F): $f \in C([0,T]; L^2(G))$;

(H): $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$ і неперервна за ξ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$; існує така додатна стала g^0, що $|g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta)| \leq g^0|\xi - \eta|$для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх ξ, $\eta \in \mathbb{R}^1$;

(K): $K \in C^1(D; C^1(\overline{\Omega}))$, $K|_{\partial\Omega \times D} = 0$, $K|_{\Omega \times \Gamma_2} = 0$, де $\Gamma_2 = \partial D \backslash \Gamma_1$;

(L): $\lambda_i \in C(Q_T)$, $\lambda_{iy_i} \in C([0,T]; L^\infty(G))$ для всіх $i = 1,\dots,l$;

(U): u_0, $u_{0,y_j} \in L^2(G)$, $j = 1,\dots,l$, $u_0|_{\partial\Omega \times D} = 0$, $u_0|_{\Omega \times \Gamma_1} = 0$.

3 Означення узагальненого розв'язку оберненої задачі

Означення 1. *Пару функцій $(u(x,y,t), f_0(t))$ назвемо узагальненим розв'язком задачі* (3)–(6), *якщо $u \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$, $f_0 \in L^2(0,T)$, і ці функції для всіх $v \in V_1(Q_T)$ задовольняють інтегральну рівність*

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle\,dt + \int_{Q_T} \Big[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i}v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j} + c(x,y,t)uv$$
$$+ g(x,y,t,u)v\Big]\,dx\,dy\,dt = \int_{Q_T} f(x,y,t)f_0(t)v\,dx\,dy\,dt$$

і, крім того, функція $u(x,y,t)$ задовольняє умови (4) *та* (6).

Нехай $\int_{G_t} K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy \neq 0$. Із рівняння (3) та умови (6) випливає, що узагальнений розв'язок задачі (3)–(6) задовольняє рівність

$$\Big[\int_{G_t} K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy\Big] f_0(t) = E'(t) + \int_{G_t} \Big(-\sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i} u$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u_{x_i} + K(x,y)c(x,y,t)u + K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dxdy, \quad t \in [0,T]. \tag{7}$$

4 Асимптотична поведінка узагальненого розв'язку оберненої задачі

Введемо позначення: $f_1 = \max\limits_{[0,T]}\big(\int_{G_t}(f(x,y,t))^2\,dxdy\big)^{\frac12}$, $K_1(t) = \int_{G_t} K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy$, $\lambda^1 = \max\limits_i \sup\limits_{Q_T} |\lambda_{iy_i}(x,y,t)|$, $c^0 = \sup\limits_{[0,T]}\big(\sup\limits_{G_t}|c(x,y,t)|^2\big)^{\frac12}$, $\Lambda^1 = \max\Big\{\sup\limits_{[0,T]} \max\limits_i \big(\sup\limits_{G_t}|\lambda_i(x,y,t)|^2\big)^{\frac12}; \sup\limits_{[0,T]} \sum\limits_{i=1}^{l}\big(\operatorname{ess\,sup}\limits_{G_t}|\lambda_{iy_i}(x,y,t)|^2\big)^{\frac12}\Big\}$, $a_1 = \max\limits_{ij} \operatorname{ess\,sup}\limits_{[0,T]} \big(\operatorname{ess\,sup}\limits_{G_t}|a_{ij}(x,y,t)|^2\big)^{\frac12}$, k_0 — додатна стала.

Нехай $\sum\limits_{i=1}^{n}\big(\int_G (K_{x_i}(x,y))^2\,dxdy\big)^{\frac12} + \sum\limits_{i=1}^{l}\big(\int_G (K_{y_i}(x,y))^2\,dxdy\big)^{\frac12} + \big(\int_G (K(x,y))^2\,dxdy\big)^{\frac12} \leq K_1$, де $K_1 \in \mathbb{R}$, $\big(\int_{G_t}|g(x,y,t,0)|^2\,dxdy\big)^{\frac12} \leq g^1(t)$ для всіх $t > 0$, де $g^1 \in L^2(0,T)$. Позначимо

$$\beta = \frac{a_0}{\varkappa} + 2c_0 - \lambda^1 - 2g^0 - \frac{2f_1K_1(g^0 + \Lambda_1 + c^0)}{k_0} - \frac{f_1^2 n a_1^2 K_1^2}{a_0 k_0^2} - 1,$$

$$\delta(t) = 3\Big(1 + \frac{f_1^2K_1^2}{k_0^2}\Big)(g^1(t))^2 + \frac{3|E'(t)|^2 f_1^2}{k_0^2}.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (C), (E), (F), (H), (K), (L), (S), (U) та $|K_1(t)| \geq k_0 > 0$ для всіх $t > 0$ і $\beta > 0$. Нехай $\lim\limits_{k\to\infty}\int_k^{k+1}|E'(\tau)|^2\,d\tau = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_k^{k+1}|g^1(t)|^2\,dt = 0$.*

Тоді для узагальненого розв'язку $(u(x,y,t), f_0(t))$ задачі (3)–(6) *виконуються такі збіжності:* $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(\cdot,\cdot,t); L^2(G)\| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_k^{k+1}\int_G \sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dxdydt = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_k^{k+1}|f_0(t)|^2\,dt = 0$.

Доведення. У праці [13] доведено, що за умов теореми існує єдина функція $u \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$, яка є узагальненим розв'язком задачі (3)–(6). З рівності (7) та рівняння (3) випливає рівність

$$u_t + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u)$$
$$= \frac{f(x,y,t)}{K_1(t)}\Big(E'(t) + \int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u_{x_i} + K(x,y)c(x,y,t)u + K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dxdy\Big). \tag{8}$$

Домножимо (8) на u та проінтегруємо по G_t:

$$\int_{G_t}\Big[u_t u + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}u + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}u_{x_j} + c(x,y,t)|u|^2 + g(x,y,t,u)u\Big]\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{K_1(t)}\Big(\int_{G_t} E'(t)f(x,y,t)u\,dx\,dy + \int_{G_t} f(x,y,t)u\,dx\,dy \int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u_{x_i} + K(x,y)c(x,y,t)u + K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dx\,dy\Big), \quad t > 0. \tag{9}$$

Оцінимо окремо доданки рівності (9), використавши умови (A)–(L).

$$\mathcal{I}_1 := \int_{G_t} u_t u\,dx\,dy = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big);$$

$$\mathcal{I}_2 := \int_{G_t} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} u\,dx\,dy \geq \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)|u|^2 \cos(\nu, y_i)\,d\sigma\,dx - \frac{\lambda^1}{2}\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy;$$

$$\mathcal{I}_3 := \int_{G_t} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} u_{x_j}\,dx\,dy \geq a_0 \int_{G_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dx\,dy;$$

$$\mathcal{I}_4 := \int_{G_t} c(x,y,t)|u|^2\,dx\,dy \geq c_0 \int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy;$$

$$\mathcal{I}_5 := \int_{G_t} g(x,y,t,u)u\,dx\,dy \leq g^0 \int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy + g^1(t)\Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big)^{\frac{1}{2}};$$

$$\mathcal{I}_6 := \frac{E'(t)}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x,y,t)u\,dx\,dy \leq \frac{|E'(t)|}{k_0} f_1 \Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big)^{1/2};$$

$$\mathcal{I}_7 := -\frac{1}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x,y,t)u\,dx\,dy \int_{G_t} \sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i} u\,dx\,dy \leq \frac{f_1 \Lambda_1 K_1}{k_0} \int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy;$$

$$\mathcal{I}_8 := \frac{1}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x,y,t)u\,dx\,dy \int_{G_t} \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}\,dx\,dy$$
$$\leq \frac{f_1 \sqrt{n} a_1 K_1}{k_0} \Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big)^{1/2} \Big(\int_{G_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dx\,dy\Big)^{1/2};$$

$$\mathcal{I}_9 := \frac{1}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x,y,t)u\,dx\,dy \int_{G_t} K(x,y)c(x,y,t)u\,dx\,dy \leq \frac{f_1 c^0 K_1}{k_0} \int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy;$$

$$\mathcal{I}_{10} := \frac{1}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x,y,t)u\,dx\,dy \int_{G_t} K(x,y) g(x,y,t,u)\,dx\,dy$$
$$\leq \frac{f_1 g^0 K_1}{k_0} \int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy + \frac{f_1 g^1(t) K_1}{k_0} \Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big)^{1/2}.$$

Врахувавши оцінки доданків $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_{10}$, з (9) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big) + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)|u|^2 \cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx + \int_{G_t} \Big(a_0 \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \\
&+ (c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0)|u|^2\Big)\,dx\,dy \leq \frac{|E'(t)| f_1 + g^1(t)(k_0 + f_1 K_1)}{k_0} \Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big)^{1/2} \\
&+ \frac{f_1 K_1 (c^0 + g^0 + \Lambda_1)}{k_0} \int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy + \frac{f_1 \sqrt{n} a_1 K_1}{k_0} \Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big)^{1/2} \Big(\int_{G_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dx\,dy\Big)^{1/2},
\end{aligned} \tag{10}$$

$t > 0$. Використавши в (10) нерівність (1), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big) + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)|u|^2 \cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx + \int_{G_t} \Big[\frac{a_0}{2} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \\
&+ \Big(c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0 - \frac{f_1 K_1 (c^0 + g^0 + \Lambda_1)}{k_0} - \frac{f_1^2 n a_1^2 K_1^2}{2 a_0 k_0^2} - \frac{1}{2}\Big)|u|^2\Big]\,dx\,dy \leq \frac{\delta(t)}{2}, \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Застосувавши в (11) нерівність (2), отримаємо

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy\Big) + \beta \int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy \leq \delta(t), \quad t > 0. \tag{12}$$

Проінтегрувавши нерівність (12), знайдемо

$$\int_{G_t} |u|^2\,dx\,dy \leq e^{-\beta t} \int_{G_0} |u_0|^2\,dx\,dy + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \delta(\tau)\,d\tau, \quad t > 0. \tag{13}$$

Проінтегруємо (10) по t від k до $k+1$, де $k \in \mathbb{N}$. Врахувавши, що

$$\frac{1}{2}\int_{G_{k+1}} |u|^2\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \int_{\Omega}\int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)|u|^2 \cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx\,dt > 0,$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
&a_0 \int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt + (c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0) \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2\,dx\,dy\,dt \leq \frac{1}{2}\int_{G_k} |u|^2\,dx\,dy \\
&+ \Big(\frac{f_1}{k_0}\Big(\int_k^{k+1} |E'(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} + \Big(1 + \frac{f_1 K_1}{k_0}\Big)\Big(\int_k^{k+1} |g^1(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big)\Big(\int_{Q_{k,k+1}} |u|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2} \\
&+ \frac{f_1 (c^0 + g^0 + \Lambda_1) K_1}{k_0} \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2\,dx\,dy\,dt \\
&+ \frac{f_1 \sqrt{n} a_1 K_1}{k_0} \Big(\int_{Q_{k,k+1}} |u|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2} \Big(\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2},
\end{aligned} \tag{14}$$

де $Q_{k,k+1} = G \times (k, k+1)$. Оскільки

$$\begin{aligned}
&\frac{f_1 \sqrt{n} a_1 K_1}{k_0} \Big(\int_{Q_{k,k+1}} |u|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2} \Big(\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{a_0}{2} \int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt + \frac{f_1^2 n a_1^2 K_1^2}{2 a_0 k_0^2} \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2\,dx\,dy\,dt,
\end{aligned}$$

то з (14) випливає нерівність

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt \leq \frac{1}{a_0} \int_{G_k} |u|^2\,dx\,dy + \beta_1 \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2\,dx\,dy\,dt + \mu(k), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

де $\beta_1 = \frac{1}{a_0}\big(\frac{2 f_1 (c^0 + g^0 + \Lambda_1) K_1}{k_0} + \frac{f_1^2 n a_1^2 K_1^2}{a_0 k_0^2} + 3 + \lambda^1 + 2g^0 + 2|c^0|\big)$, $\mu(k) = \frac{2}{a_0}\Big((1 + \frac{f_1^2 K_1^2}{k_0^2}) \int_k^{k+1} |g^1(t)|^2\,dt + \frac{f_1^2}{k_0^2} \int_k^{k+1} |E'(t)|^2\,dt\Big)$. Проінтегрувавши (13) по t від k до $k+1$, де $k \in \mathbb{N}$, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_{k,k+1}} |u|^2\,dx\,dy\,dt \leq \frac{1}{\beta} e^{-\beta k}(1 - e^{-\beta}) \int_{G_0} |u_0|^2\,dx\,dy \\
&+ \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta}) \int_0^k e^{\beta(t-k)} \delta(t)\,dt - \frac{1}{\beta}\int_k^{k+1} e^{-\beta(k+1-t)} \delta(t)\,dt + \frac{1}{\beta}\int_k^{k+1} \delta(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Тоді з (15) випливає оцінка

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt \leq \mu_1(k) + \mu(k), \ k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

де
$$\mu_1(k) = \left(\tfrac{1}{a_0} + \tfrac{\beta_1}{\beta}(1-e^{-\beta})\right)\left[e^{-\beta k}\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy + \int_0^k e^{-\beta(k-\tau)}\delta(\tau)\,d\tau\right] + \tfrac{\beta_1}{\beta}\int_k^{k+1}(1-e^{-\beta(k+1-t)})\delta(t)\,dt.$$

Із формули (7) випливає оцінка
$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}|f_0(t)|^2\,dt \le &\frac{2}{k_0^2}\int_k^{k+1}|E'(t)|^2\,dt + 6\max_{t\in[k,k+1]}\int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^l(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}\\ &+K(x,y)c(x,y,t)+K(x,y)g^0\Big)^2dxdy\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dxdydt\\ &+\frac{6a_1^2K_1^2n}{k_0^2}\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\,dxdydt+\frac{6K_1^2}{k_0^2}\int_{Q_{k,k+1}}|g^1(t)|^2\,dt,\qquad k\in\mathbb{N}.\end{aligned}\tag{17}$$

Із (13) отримуємо нерівність
$$\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy \le e^{-\beta t}\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy + \sum_{0\le k\le[t]} e^{-\beta(t-k-1)}\int_k^{k+1}\delta(\tau)\,d\tau.\tag{18}$$

З умов теореми випливає, що $\sum\limits_{0\le k\le[t]} e^{-\beta(t-k)}\int_k^{k+1}\delta(\tau)\,d\tau \to 0$ при $t\to+\infty$. Тоді з (18) знайдемо, що $\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\to 0$ при $t\to\infty$. Оскільки $\mu(k)\to 0$, $\mu_1(k)\to 0$ при $k\to\infty$, то з (16) та з (17) випливає, що $\int_{Q_{k,k+1}}\sum\limits_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt\to 0$ і $\int_k^{k+1}|f_0(t)|^2\,dt\to 0$ при $k\to\infty$. □

Нехай $a_2 = \max\limits_{ij}\sup\limits_{[0,T]}(\operatorname{ess\,sup}\limits_{G_t}|a_{ijx_i}|^2)^{1/2}$, $\sum\limits_{i,j=1}^n|\int_G(K_{x_ix_i}(x,y))^2\,dxdy|^{1/2}\le K_1$, $\beta_2=\frac{2a_0}{\varkappa}+2c_0-\lambda^1-2g^0-\frac{2f_1(c^0+g^0+\Lambda_1+a_2n+a_1)K_1}{k_0}-1$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (C), (E), (F), (H), (K), (L), (S), (U) та* $a_{ij}, a_{ijx_i}\in C([0,T];L^\infty(G))$, $i,j=1,\dots,n$, $E'\in C([0,T])$, $K\in C^1(D;C^2(\Omega))$, $g^1\in C([0,T])$ *і, крім того,* $|K_1(t)|\ge k_0>0$ *для всіх* $t>0$ *та* $\beta_2>0$. *Нехай* $\lim\limits_{t\to\infty}|E'(t)|=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}|g^1(t)|=0$.

Тоді $f_0\in C([0,T])$ *та для узагальненого розв'язку задачі (3)–(6) виконуються такі збіжності*
$$\lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,\cdot,t);L^2(G)\|=0,\qquad \lim_{k\to\infty}\int_k^{k+1}\int_G\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\,dxdydt=0,\qquad \lim_{t\to+\infty}|f_0(t)|=0.$$

Доведення. Використаємо доведення теореми 1. Для розв'язку задачі (3)–(6) так само, як у випадку теореми 1, використаємо рівності (7) та (8), записавши їх у вигляді
$$\begin{aligned}f_0(t)=(K_1(t))^{-1}\Big(E'(t)+\int_{G_t}\Big(&-\sum_{i=1}^l(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u-\sum_{i,j=1}^n(K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t))_{x_i}u\\ &+K(x,y)c(x,y,t)u+K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dxdy\Big),\quad t\in[0,T]\end{aligned}\tag{19}$$
та
$$\begin{aligned}u_t&+\sum_{i=1}^l\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}-\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j}+c(x,y,t)u+g(x,y,t,u)\\ &=f(x,y,t)(K_1(t))^{-1}\Big(E'(t)+\int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^l(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u\\ &-\sum_{i,j=1}^n(K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t))_{x_i}u+K(x,y)c(x,y,t)u+K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dxdy\Big).\end{aligned}\tag{20}$$

За умов теореми всі функції правої частини рівності (19) неперервні за змінною t на $[0,T]$, тому $f_0\in C([0,T])$. Домножимо рівність (20) на u та поінтегруємо її по G_t. Оскільки
$$-\frac{1}{K_1(t)}\int_{G_t}f(x,y,t)u\,dx\,dy\int_{G_t}\sum_{i,j=1}^n(K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t))_{x_i}u\,dx\,dy\le\frac{f_1(na_2+a_1)K_1}{k_0}\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy,$$
а оцінки інших доданків з (20) повторюють оцінки $\mathcal{I}_1-\mathcal{I}_7$, $\mathcal{I}_9$, $\mathcal{I}_{10}$, то з (20) випливає
$$\begin{aligned}&\frac12\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\Big)+\frac12\int_\Omega\int_{\Gamma_2}\sum_{i=1}^l\lambda_i(x,y,t)|u|^2\cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx+\int_{G_t}\Big[a_0\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\\ &+(c_0-\frac{\lambda^1}{2}-g^0)|u|^2\Big]\,dx\,dy\le\Big(g^1(t)+\frac{f_1(|E'(t)|+g^1(t)K_1)}{k_0}\Big)\Big(\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\Big)^{\frac12}\\ &+\frac{f_1(c^0+g^0+\Lambda_1+a_2n+a_1)K_1}{k_0}\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy,\quad t>0.\end{aligned}\tag{21}$$

Використавши в (21) нерівність (1), отримаємо
$$\begin{aligned}&\frac12\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\Big)+\frac12\int_\Omega\int_{\Gamma_2}\sum_{i=1}^l\lambda_i(x,y,t)|u|^2\cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx+\int_{G_t}\Big(a_0\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\\ &+\Big(c_0-\frac{\lambda^1}{2}-g^0-\frac{f_1(c^0+g^0+\Lambda_1+a_2n+a_1)K_1}{k_0}-\frac12\Big)|u|^2\Big)\,dx\,dy\le\frac{\delta(t)}{2},\quad t>0.\end{aligned}\tag{22}$$

Із (22) та нерівності Фрідріхса випливає оцінка
$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\Big)+\beta_2\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\le\delta(t),\quad t>0.\tag{23}$$

Проінтегрувавши (23), отримуємо нерівності
$$\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\le e^{-\beta_2t}\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy+\int_0^te^{-\beta_2(t-\tau)}\delta(\tau)\,d\tau,\quad t>0,\tag{24}$$
та
$$\begin{aligned}\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\le&\frac{1}{\beta_2}e^{-\beta_2k}(1-e^{-\beta_2})\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy+\frac{1}{\beta_2}(1-e^{-\beta_2})\int_0^ke^{\beta_2(t-k)}\delta(t)\,dt\\ &-\frac{1}{\beta_2}\int_k^{k+1}e^{-\beta_2(k+1-t)}\delta(t)\,dt+\frac{1}{\beta_2}\int_k^{k+1}\delta(t)\,dt,\quad k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Проінтегрувавши (21) по t від k до $k+1$, $k\in\mathbb{N}$, та врахувавши, що $\frac12\int_{G_{k+1}}|u|^2\,dx\,dy+\frac12\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^l\lambda_i(x,y,t)|u|^2\cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx\,dt>0$, отримаємо
$$\begin{aligned}&a_0\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt+(c_0-\frac{\lambda^1}{2}-g^0)\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\le\frac12\int_{G_k}|u|^2\,dx\,dy\\ &+\Big(\Big(1+\frac{f_1K_1}{k_0}\Big)\Big(\int_k^{k+1}|g^1(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}+\frac{f_1}{k_0}\Big(\int_k^{k+1}|E'(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big)\Big(\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2}\\ &+\frac{f_1(c^0+g^0+\Lambda_1+a_2n+a_1)K_1}{k_0}\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt.\end{aligned}\tag{25}$$

Тоді з (25) випливає

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dx\, dy\, dt \le \frac{1}{2a_0} \int_{G_k} |u|^2 \, dx\, dy + \beta_3 \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 \, dx\, dy\, dt + \mu_2(k), \tag{26}$$

де

$$\beta_3 = \frac{1}{a_0} \left(\frac{f_1(c^0 + g^0 + \Lambda_1 + a_2 n + a_1)K_1}{k_0} + \frac{3}{2} + |c_0| + \frac{\lambda^1}{2} + g^0 \right), \quad \mu_2(k) = \frac{\mu(k)}{2}.$$

Зауважимо, що $\frac{1}{2a_0} \int_{G_k} |u|^2 \, dx\, dy + \beta_3 \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 \, dx\, dy\, dt \le \mu_3(k)$, де

$$\mu_3(k) = \left(\frac{1}{2a_0} + \frac{\beta_3}{\beta_2}(1 - e^{-\beta_2}) \right) \left[e^{-\beta_2 k} \int_{G_0} |u_0|^2 dx\, dy + \int_0^k e^{-\beta_2(k-\tau)} \delta(\tau)\, d\tau \right] + \frac{\beta_3}{\beta_2} \int_k^{k+1} (1 - e^{-\beta_2(k+1-t)}) \delta(t)\, dt.$$

Тоді з (26) випливає оцінка

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dx\, dy\, dt \le \mu_2(k) + \mu_3(k), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Із (19) також випливає, що

$$|f_0(t)| \le \frac{1}{k_0} |E'(t)| + \frac{K_1}{k_0} |g^1(t)| + \frac{1}{k_0} \max_{t>0} \left(\int_{G_t} \Big(-\sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t) K(x,y))_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t))_{x_i} + K(x,y)c(x,y,t) + K(x,y)g^0 \Big)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{G_t} |u|^2 dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t > 0. \tag{28}$$

Запишемо (24) у вигляді

$$\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy \le e^{-\beta_2 t} \int_{G_0} |u_0|^2 \, dx\, dy + \sum_{0 \le k \le [t]} e^{-\beta_2(t-k-1)} \int_k^{k+1} \delta(\tau)\, d\tau. \tag{29}$$

З умов теореми випливає, що $\sum\limits_{0 \le k \le [t]} e^{-\beta_2(t-k-1)} \int_k^{k+1} \delta(\tau)\, d\tau \to 0, \quad t \to +\infty$. Тоді з (29) отримуємо

$$\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Зауважимо, що $\mu_2(k) \to 0$, $\mu_3(k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тому з (27) і (28) випливає, що

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dx\, dy\, dt \to 0 \text{ при } k \to \infty, \quad |f_0(t)| \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

□

References

[1] Beilina N.V. *On solvability of a inverse problem for hyperbolic equation with an integral overdetermination condition.* Vestnik Samara Univ. 2011, **23** (2), 34–39. (in Russian)

[2] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004. doi:10.1007/978-3-0348-7844-9

[3] Ivanchov M.I. Inverse problems for equations of parabolic type. In: Mathematical Studies, Monograph Series, **10**. VNTL Publishers, L'viv, 2003.

[4] Kamynin V.L. *On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition.* Math. Notes 2005, **77** (4), 482–493. doi:10.1007/s11006-005-0047-6

[5] Kolmogoroff A.N. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung).* Ann. Math. 1934, **35**, 116–117. doi:10.2307/1968123

[6] Kozhanov A.I. *An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation II*, J. Inverse Ill-Posed Probl. 2003, **11** (5), 505–522. doi: 10.1163/156939403770888246

[7] Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S. Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance. In: Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, II. International Mathematical Series, **2**, 243–265. Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.

[8] Lavrenyuk S., Protsakh N. *Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain.* Tatra Mt. Math. Publ. 2007, **38**, 131–146.

[9] Lorenzi A., Prilepko A.I. *Global existence results for first-order integrodifferential Identification problems.* Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova 1996, **96**, 51–84.

[10] Malyts'ka H.P. *Fundamental solution matrix of the Cauchy problem for a class of systems of Kolmogorov type equations.* Differential Equations 2010, **46** (5), 753–757. doi:10.1134/S0012266110050150

[11] Protsakh N. *Inverse problem for an ultraparabolic equation.* Tatra Mt. Math. Publ. 2013, **54**, 133–151. doi:10.2478/tmmp-2013-0011

[12] Protsakh N. *Properties of a solution of the mixed problem for an ultraparabolic equation with the memory term.* J. Math. Sci. 2012, **183** (6), 823–834. doi:10.1007/s10958-012-0843-y

[13] Protsakh N.P. *Inverse problem for semilinear ultraparabolic equation with unknown right-hand side function.* Ukr. Math. J. (in print).

[14] Vabishchevich P.N. *Numerical solution of the problem of the identification of the right-hand side of a parabolic equation.* Russian Math. (Iz. VUZ) 2003, **47** (1), 27–35.

[15] Vasin A.I., Kamynin V.L. *On the asymptotic behavior of solutions of inverse problems for parabolic equations.* Siberian Math. J. 1997, **38** (4), 647–662. doi: 10.1007/BF02674572

Надійшло 03.07.2013

Protsakh N.P. *Asymptotic behavior of solution of the inverse problem for weakly nonlinear ultraparabolic equation.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 326–335.

The inverse problem with the integral overdetermination condition for a weakly nonlinear ultraparabolic equation with unknown time-dependent multiplier of the right-hand side of the equation is considered. The conditions when a weak solution decreases to zero as the time variable increases are found.

Key words and phrases: inverse problem, ultraparabolic equation, generalized solution.

Процах Н.П. *Асимптотическое поведение решения обратной задачи для слабо нелинейного ультрапараболического уравнения* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 326–335.

Рассмотрена обратная задача с интегральным условием переопределения для слабо нелинейного ультрапараболического уравнения с неизвестным множителем правой части уравнения, который зависит от времени. Найдены условия, при которых обобщенное решение задачи стремится к нулю при возростании временной переменной.

Ключевые слова и фразы: обратная задача, ультрапараболическое уравнение, обобщенное решение.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.53

Фединяк С.І.

ПРОСТІР ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Фединяк С.І. *Простір цілих рядів Діріхле* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 336–340.

Вивчається простір цілих рядів Діріхле скінченного Ф-типу з заданою топологією, відносно якої він буде простором Фреше.

Ключові слова і фрази: ціла функція, ряд Діріхле, максимум модуля, порядок, рід, простір Фреше.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
E-mail: fedynyak@yahoo.com

Вступ

Для цілого ряду Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \qquad s = \sigma + it, \quad \sigma \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, покладемо

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| \,:\, t \in \mathbb{R}\}, \quad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}.$$

Різні властивості просторів рядів Діріхле, що мають скінчені порядок і тип за Ріттом, розглянуто в роботах [1], [2].

Позначимо через X простір усіх цілих рядів Діріхле (1), для яких

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{e^{\sigma\varrho(\sigma)}} \leq T < \infty,$$

де $\varrho(\sigma)$ — уточнений порядок за Ріттом. Нехай для кожного ряду Діріхле $F \in X$

$$\|F\|_m = |a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \left(\frac{\varphi(\lambda_n)}{\left((T+\frac{1}{m})\varrho e\right)^{\frac{1}{\varrho}}} \right)^{\lambda_n},$$

де $m = 1, 2, 3, \ldots$, а $\varphi(t)$ — розв'язок рівняння $t = e \cdot \varrho(\ln\varphi) \cdot \ln\varphi$.

В [2], зокрема, показано, що простір X з метрикою

$$d(F, G) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F-G\|_m}{1+\|F-G\|_m}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

є простором Фреше.

Подібні дослідження для випадку рядів Діріхле, що мають уточнений логарифмічний порядок і скінчений логарифмічний тип, проведено в роботі [3].

У цій статті результати із [1]–[3] узагальнено на випадок простору рядів Діріхле довільного зростання.

1 Формулювання та доведення основних результатів

Через Ω позначимо клас додатних двічі неперервно диференційовних необмежених на $\mathbb{R}$ функцій Φ таких, що Φ' додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Через φ позначимо функцію, обернену до функції Φ', а через $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ — функцію, асоційовану з функцією Φ за Ньютоном. Зауважимо, що функції $\Psi(x)$ і $\varphi(x)$ — зростаючі [4].

Позначимо через $\mathfrak{F}$ множину цілих рядів Діріхле (1), для яких

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \leq 1 \tag{2}$$

і

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\Phi(\Psi(\varphi(\frac{\lambda_n}{2})))} = 0. \tag{3}$$

Для кожної функції $F \in \mathfrak{F}$ введемо

$$\|F\|_m = |a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \exp\left\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\right\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що $\|F\|_m$ існує і є нормою на множині $\mathfrak{F}$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Для цього нам потрібна буде наступна лема.

Лема 1 ([4]). *Нехай $\Phi \in \Omega$ і функція F зображена цілим рядом Діріхле (1). Для того, щоб виконувалася умова $\ln\mu(\sigma, F) \leq (1+\varepsilon)\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$, необхідно і досить, щоб $\ln|a_n| \leq -\lambda_n \Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\right)\right)$ для всіх $n \geq n_0$.*

Враховуючи нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$, з (2) для довільного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0$ маємо $\ln\mu(\sigma, F) \leq (1+\varepsilon)\Phi(\sigma)$. Отже,

$$|a_n| \leq \exp\left\{-\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big)\right\}, \quad n \geq n_0. \tag{4}$$

З (3) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що

$$\frac{1}{m} - \varepsilon \geq \frac{2\ln n}{\Phi(\varphi(\frac{\lambda_n}{2}))} = \gamma_n, \quad n \geq n_1.$$

Тоді для всіх досить великих n

$$|a_n| \exp\left\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\right\} \leq \exp\left\{-\lambda_n\left\{\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big) - \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\right\}\right\}$$
$$= \exp\left\{-\lambda_n \int_{\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}} \Big(\Psi(\varphi(t))\Big)' dt\right\} = \exp\left\{-\lambda_n \int_{\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2} dt\right\}$$
$$\leq \exp\left\{-\lambda_n \Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big) \int_{\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}} \frac{dt}{t^2}\right\} = \exp\left\{-\Big(\frac{1}{m} - \varepsilon\Big)\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\right\}$$

$$\le \exp\Big\{-\Big(\frac{1}{m}-\varepsilon\Big)\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big)\Big\} \le \exp\Big\{-\gamma_n\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big)\Big\} = \frac{1}{n^2}.$$

Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ ряд $|a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|\exp\left\{\lambda_n\Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\right)\right)\right\}$ збіжний. Зауважимо також, що $\|F\|_p \le \|F\|_q$ при $p \le q$.

Легко бачити, що $\|F\|_m$ ($m \in \mathbb{N}$) є нормою. Ця норма породжує метричну топологію на $\mathfrak{F}$. Покладемо

$$d(F,G) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\frac{\|F-G\|_m}{1+\|F-G\|_m}.$$

Через $(\mathfrak{F},d)$ позначимо простір $\mathfrak{F}$ з метрикою d.

Теорема 1. *Простір $(\mathfrak{F},d)$ є простором Фреше.*

Доведення. Нам потрібно показати, що простір $(\mathfrak{F},d)$ повний. Нехай послідовність рядів Діріхле $\{F_\alpha\}$ є d-фундаментальною в $\mathfrak{F}$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $k_0 = k_0(\varepsilon)$, що для всіх $\alpha,\beta \ge k_0$ виконується $d(F_\alpha,F_\beta) < \varepsilon$.

Для довільних $\theta \in (0;1)$ і $m \in \mathbb{N}$ виберемо $\varepsilon > 0$ так, що $2^m\cdot\varepsilon < \theta < 1$. Оскільки $d(F_\alpha,F_\beta) < \varepsilon$, то

$$\|F_\alpha - F_\beta\|_m = |a_0^{(\alpha)} - a_0^{(\beta)}| + \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n^{(\alpha)} - a_n^{(\beta)}|\exp\Big\{\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} < \frac{\theta}{1-\theta}. \qquad (5)$$

Отже, $|a_n^{(\alpha)} - a_n^{(\beta)}| < \frac{\theta}{1-\theta}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{a_n^{(\alpha)}\}_{\alpha=1}^{\infty}$ є фундаментальною для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} a_n^{(\alpha)} = a_n$.

Спрямувавши в (5) β до $+\infty$, для $\alpha \ge k_0$ отримаємо

$$|a_0^{(\alpha)} - a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n^{(\alpha)} - a_n|\exp\Big\{\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} < \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Покладемо $\alpha = k_0$, тоді

$$|a_n|\exp\Big\{\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} < |a_n^{(k_0)}|\exp\Big\{\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} + \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Ряд Діріхле $F_{k_0} = a_0^{(k_0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{(k_0)}e^{s\lambda_n}$ належить $(\mathfrak{F},d)$ і, отже, виконується (4). Тому для деякого $p > m$ і досить великих n буде виконуватись нерівність

$$|a_n^{(k_0)}| \le \exp\Big\{-\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{p}}\Big)\Big)\Big\}.$$

Тоді

$$|a_n|\exp\Big\{\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} < \exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{p}}\Big)\Big) - \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big)\Big\} + \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Враховуючи довільність θ і те, що перший доданок у правій частині останньої нерівності прямує до нуля при $n \to \infty$, отримуємо, що послідовність $\{a_n\}$ задовольняє (4). Тому, за лемою 1, для ряду Діріхле $F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ виконується співвідношення

$$\ln\mu(\sigma,F) \le (1+\varepsilon)\Phi(\sigma), \quad \sigma \ge \sigma_1.$$

Щоб показати, що $F \in \mathfrak{F}$, нам потрібна наступна лема.

Лема 2. *Якщо $\Phi \in \Omega$ і виконується* (3), *то співвідношення*

$$\ln\mu(\sigma,F) \le (1+o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \to +\infty, \qquad (6)$$

рівносильне співвідношенню

$$\ln M(\sigma,F) \le (1+o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \to +\infty. \qquad (7)$$

Доведення. За нерівністю Коші $\mu(\sigma,F) \le M(\sigma,F)$ з (7) випливає (6).

Доведемо, що з (6) випливає (7). З (6) для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ виконується умова $\ln\mu(\sigma,F) \le (1+\varepsilon)\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0,\infty)$, а з леми 1 випливає, що для всіх $n \ge n_0$ виконується $\ln|a_n| \le -\lambda_n\Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\right)\right)$.

Покладемо $\gamma(\sigma) = 2\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$. Тоді для всіх $\sigma \ge \sigma_0$ виконується

$$M(\sigma,F) \le \Big(\sum_{\lambda_n\le\gamma(\sigma)} + \sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)}\Big)|a_n|e^{\sigma\lambda_n}$$
$$\le \mu(\sigma,F)n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)}\exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big) - \sigma\Big)\Big\},$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n\le t} 1$.

Для всіх $\lambda_n > \gamma(\sigma)$ виконується

$$\exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big) - \sigma\Big)\Big\} < \exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big) - \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big)\Big)\Big\}$$
$$= \exp\Big\{-\lambda_n\int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}}\Big(\Psi\Big(\varphi(x)\Big)\Big)'dx\Big\} = \exp\Big\{-\lambda_n\int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}}\frac{\Phi(\varphi(x))}{x^2}dx\Big\}$$
$$\le \exp\Big\{-\lambda_n\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big)\int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}}\frac{dx}{x^2}\Big\} = \exp\Big\{-(1-\varepsilon)\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big)\Big\}.$$

Враховуючи сказане вище, а також те, що з (3) випливає нерівність $\frac{\ln n}{\Phi(\varphi(\frac{\lambda_n}{2}))} < \frac{1-\varepsilon}{2}$, отримуємо

$$M(\sigma,F) < \mu(\sigma,F)n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)}\frac{1}{n^2} < \mu(\sigma,F)n(\gamma(\sigma)) + \frac{1}{n(\gamma(\sigma))}.$$

Тобто,

$$\ln M(\sigma,F) < \ln\mu(\sigma,F) + \ln n(\gamma(\sigma)) + o(1), \quad \sigma \to +\infty.$$

Зіславшись знову на (3), отримуємо, що

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln n(\gamma(\sigma))}{\Phi(\sigma)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln n(x)}{\Phi(\Psi(\varphi(x/2)))} = 0.$$

Отже, виконується (7). Лему 2 доведено. □

Щоб довести теорему, залишилось показати, що $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} d(F_\alpha,F) = 0$. Зауважимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $M > 0$, що

$$\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\frac{\|F^{(\alpha)} - F\|_m}{1+\|F^{(\alpha)} - F\|_m} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8)$$

Оскільки $F^{(\alpha)}, F \in \mathfrak{F}$, то існує таке $N_1 \in \mathbb{N}$, що для всіх $m \in \{1,2,3,\dots,M\}$ виконується

$$\sum_{n=N_1+1}^{+\infty} |a_n^{(\alpha)} - a_n| \exp\left\{\lambda_n \Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\right)\right)\right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9}$$

Оскільки $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} a_n^{(\alpha)} = a_n$, то існує таке K^*, що для всіх $\alpha > K^*$ та $m \in \{1,2,3,\dots,M\}$ буде виконуватись співвідношення

$$\sum_{n=0}^{N_1} |a_n^{(\alpha)} - a_n| \exp\left\{\lambda_n \Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\right)\right)\right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10}$$

Тоді з (9) і (10) випливає, що $\|F_\alpha - F\|_m < \frac{\varepsilon}{2}$, звідки маємо, що

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F^{(\alpha)} - F\|_m}{1 + \|F^{(\alpha)} - F\|_m} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому, зважаючи на (8), отримуємо, що $d(F_\alpha, F) < \varepsilon$. Отже, простір $(\mathfrak{F}, d)$ є повним. Теорему доведено. □

References

[1] Kamthan P.K. *FK-Space for entire Dirichlet functions.* Collec. Math. 1969, **20** (3), 272–280.

[2] Kamthan P.K., Hussain T. *Spaces of entire functions represented by Dirichlet series.* Collec. Math. 1968, **19** (3), 203–216.

[3] Kumar A., Srivastava G.S. *Spaces of entire functions of slow growth represented by Dirichlet series.* Portugal. Math. 1994, **51** (1), 3–11.

[4] Sheremeta M.M. *Derivative of an entire function.* Ukrainian Math. J. 1988, **40** (2), 188–192.

Надійшло 01.06.2013

Fedynyak S.I. *Space of entire Dirichlet series.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 336–340.

We consider the space of entire Dirichlet series of finite Φ-type, endowed with a certain topology under which it is a Frechet space.

Key words and phrases: entire function, Dirichlet series, maximum modulus, order, genus, Frechet space.

Федыняк С.И. *Пространство целых рядов Дирихле* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 336–340.

Изучается пространство целых рядов Дирихле конечного Φ-типа, наделенное некоторой топологией, относительно которой оно будет пространством Фреше.

Ключевые слова и фразы: целая функция, ряд Дирихле, максимум модуля, порядок, род, пространство Фреше.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.5

KHATS' R.V.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF ENTIRE FUNCTIONS OF IMPROVED REGULAR GROWTH IN THE METRIC OF $L^p[0,2\pi]$

Khats' R.V. *Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0,2\pi]$.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 341–344.

We describe an asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays in the metric of $L^p[0,2\pi]$.

Key words and phrases: entire function of improved regular growth, finite system of rays, Fourier coefficients, Hausdorff-Young theorem.

Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, Ukraine

E-mail: khats@ukr.net

1 Introduction and main result

The asymptotic behavior of entire and meromorphic functions of positive order of completely regular growth (for details, see [2, 3, 5, 11]) in the metric of $L^p[0,2\pi]$ was described in [6, 11, 12, 13]. Similar results for entire functions of zero order whose zero-counting functions are slowly increasing were obtained in [1]. In particular, from [11, Theorem 7.2, p. 78] it follows the following statement.

Theorem A. *If an entire function f of order $\rho \in (0,+\infty)$ with the indicator $h(\theta,f)$ is of completely regular growth, then for any $p \in [1,+\infty)$*

$$\lim_{r\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} - h(\theta,f) \right|^p d\theta \right\}^{1/p} = 0.$$

Conversely, if for some entire function f, $f(0)=1$, there exist $p \in [1,+\infty)$ and $\widetilde{h} \in L^p[0,2\pi]$ such that

$$\lim_{r\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} - \widetilde{h}(\theta) \right|^p d\theta \right\}^{1/p} = 0,$$

then f is of completely regular growth and $\widetilde{h}(\theta) = h(\theta,f)$ for almost all $\theta \in [0,2\pi]$.

The aim of the present paper is obtain an analog of Theorem A for entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays (see [4, 7, 8, 9, 10, 14]).

An entire function f is called a function of *improved regular growth* (see [7, 8, 9, 10, 14]) if for some $\rho \in (0,+\infty)$ and $\rho_1 \in (0,\rho)$, and a 2π-periodic ρ-trigonometrically convex function $h(\varphi) \not\equiv -\infty$ there exists the set $U \subset \mathbb{C}$ contained in the union of disks with finite sum of radii and such that $\log|f(z)| = |z|^\rho h(\varphi) + o(|z|^{\rho_1})$, $U \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty$.

If an entire function f is a function of improved regular growth, then it has the order ρ and indicator h [14]. Our main result is the following theorem.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

Theorem 1. *An entire function f of order $\rho \in (0,+\infty)$ with zeros on a finite system of rays $\{z : \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_m < 2\pi$, is a function of improved regular growth if and only if for some $\rho_2 \in (0,\rho)$ and any $p \in [1,+\infty)$, one has*

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} - h(\varphi)\right|^p d\varphi\right\}^{1/p} = o(r^{\rho_2-\rho}), \quad r\to+\infty. \tag{1}$$

2 Preliminaries

Let f be an entire function with $f(0)=1$, let $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be the sequence of its zeros, let p be the smallest integer for which $\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^{-p-1} < +\infty$, let Q_ρ be the coefficient of z^ρ in the exponential factor in the Hadamard-Borel representation [5, p. 38] of an entire function of finite order, and let $c_k(r,\log|f|)$ be the Fourier coefficients of $\log|f|$, i.e.

$$c_k(r,\log|f|) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad r>0.$$

Further, let f be an entire function of order $\rho \in (0,+\infty)$ with zeros on a finite system of rays $\{z : \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_m < 2\pi$. Furthermore, if ρ is noninteger and f is a function of improved regular growth, then an indicator h of f has the form ([8, 10, 14])

$$h(\varphi) = \sum_{j=1}^m h_j(\varphi),$$

where $h_j(\varphi)$ is a 2π-periodic function such that on $[\psi_j, \psi_j+2\pi)$

$$h_j(\varphi) = \frac{\pi\Delta_j}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi-\psi_j-\pi), \quad \Delta_j\in[0,+\infty).$$

In the case $\rho\in\mathbb{N}$, the indicator h is defined by the formula ([8, 9, 10])

$$h(\varphi) = \begin{cases} \tau_f\cos(\rho\varphi+\theta_f) + \sum_{j=1}^m h_j(\varphi), & p=\rho,\\ Q_\rho\cos\rho\varphi, \quad p=\rho-1, \end{cases}$$

where $\delta_f\in\mathbb{C}$, $\tau_f = |\delta_f/\rho + Q_\rho|$, $\theta_f = \arg(\delta_f/\rho+Q_\rho)$ and $h_j(\varphi)$ is a 2π-periodic function such that on $[\psi_j,\psi_j+2\pi)$ we have

$$h_j(\varphi) = \Delta_j(\pi-\varphi+\psi_j)\sin\rho(\varphi-\psi_j) - \frac{\Delta_j}{\rho}\cos\rho(\varphi-\psi_j).$$

Lemma 1 ([8]). *If an entire function f of order $\rho\in(0,+\infty)$ with zeros on a finite system of rays $\{z : \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_m < 2\pi$, is of improved regular growth, then for some $\rho_3\in(0,\rho)$*

$$c_k(r,\log|f|) = c_k r^\rho + \frac{o(r^{\rho_3})}{k^2+1}, \quad r\to+\infty, \tag{2}$$

holds uniformly in $k\in\mathbb{Z}$, where

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}h(\varphi)\,d\varphi = \frac{\rho}{\rho^2-k^2}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j}, \quad \Delta_j\in[0,+\infty),$$

for a noninteger ρ, and

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\rho^2-k^2}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j}, & |k|\ne\rho=p,\\ \dfrac{\tau_f e^{i\theta_f}}{2} - \dfrac{1}{4\rho}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-i\rho\psi_j}, & k=\rho=p,\\ 0, \quad |k|\ne\rho=p+1, \\ \dfrac{Q_\rho}{2}, \quad k=\rho=p+1, \end{cases}$$

if ρ is an integer.

Remark that, using Lemma 1 and the Riesz-Fischer theorem [11, p. 5], we get that there exists an indicator $h\in L^2[0,2\pi]$ defined by the equality $h(\varphi) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\varphi}$ (see [11, Definition 7.2, p. 77]).

3 Proof of Theorem 1

Necessity. If an entire function f of order $\rho\in(0,+\infty)$ with zeros on a finite system of rays $\{z : \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_m < 2\pi$, is of improved regular growth, then by (2), we have

$$\left|\frac{c_k(r,\log|f|)}{r^\rho} - c_k\right| \le \frac{C}{k^2+1}, \quad k\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

for some constant $C>0$ and all $r>0$. In view of this, the sequence $(r^{-\rho}c_k(r,\log|f|) - c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ belongs to the space l_q for all $q>1$ and $r>0$. Moreover, applying the Hausdorff-Young theorem [11, p. 5], for $p\ge 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, we get

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} - h(\varphi)\right|^p d\varphi\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{c_k(r,\log|f|)}{r^\rho} - c_k\right|^q\right\}^{1/q}.$$

According to (3), the last series is uniformly convergent with respect to r. Therefore, using Lemma 1, we obtain (1) for $p\ge2$. From this and Hölder's inequality it follows that (1) holds for $1\le p<2$.

Sufficiency. Let (1) holds. Then for some $\rho_2\in(0,\rho)$ and each $k\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_k(r,\log|f|)}{r^\rho} - c_k\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} - h(\varphi)\right| d\varphi\\ &\le \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} - h(\varphi)\right|^p d\varphi\right\}^{1/p} = o(r^{\rho_2-\rho}), \quad r\to+\infty.\end{aligned}$$

Hence, for some $\rho_2\in(0,\rho)$ and each $k\in\mathbb{Z}$ we get $c_k(r,\log|f|) = c_k r^\rho + o(r^{\rho_2})$, $r\to+\infty$. Then by [10, Theorem 1, p. 1718] an entire function f is a function of improved regular growth. This concludes the proof of the theorem.

REFERENCES

[1] Bodnar O.V., Zabolots'kyi M.V. *Criteria for the regularity of growth of the logarithm of modulus and the argument of an entire function.* Ukrainian Math. J. 2010, **62** (7), 1028–1039. doi:10.1007/s11253-010-0411-x (translation of Ukr. Mat. Zh. 2010, **62** (7), 885–893. (in Ukrainian))

[2] Gol'dberg A.A. *B.Ya. Levin, the founder of the theory of entire functions of completely regular growth.* Mat. Fiz., Anal., Geom. 1994, **1** (2), 186–192. (in Russian)

[3] Gol'dberg A.A., Levin B.Ya., Ostrovskii I.V. *Entire and meromorphic functions.* VINITI 1991, **85**, 5–186. (in Russian)

[4] Hirnyk M.O. *Subharmonic functions of improved regular growth.* Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. 2009, **4**, 13–18. (in Ukrainian)

[5] Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions. Gostekhizdat, Moscow, 1956. (in Russian)

[6] Kalynets' R.Z., Kondratyuk A.A. *On the regularity of the growth of the modulus and argument of an entire function in the metric of $L^p[0,2\pi]$.* Ukrainian Math. J. 1998, **50** (7), 1009–1018. doi: 10.1007/BF02528830 (translation of Ukr. Mat. Zh. 1998, **50** (7), 889–896. (in Ukrainian))

[7] Khats' R.V. *Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth.* Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 129–133.

[8] Khats' R.V. *Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays.* Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky. 2011, **718** (718), 10–14.

[9] Khats' R.V. *On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays.* Mat. Stud. 2006, **26** (1), 17–24.

[10] Khats' R.V. *Regularity of growth of Fourier coefficients of entire functions of improved regular growth.* Ukrainian Math. J. 2012, **63** (12), 1953–1960. doi:10.1007/s11253-012-0624-2 (translation of Ukr. Mat. Zh. 2011, **63** (12), 1717–1723. (in Ukrainian))

[11] Kondratyuk A.A. Fourier series and meromorphic functions. Vyshcha shkola, Kyiv, 1988. (in Russian)

[12] Vasyl'kiv Ya.V. *Asymptotic behavior of logarithmic derivatives and logarithms of meromorphic functions of completely regular growth in the metric of $L^p[0,2\pi]$. I.* Mat. Stud. 1999, **12** (1), 37–58. (in Ukrainian)

[13] Vasyl'kiv Ya.V. *Asymptotic behavior of logarithmic derivatives and logarithms of meromorphic functions of completely regular growth in the metric of $L^p[0,2\pi]$. II.* Mat. Stud. 1999, **12** (2), 135–144. (in Ukrainian)

[14] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. *On growth regularity of entire function of noninteger order with zeros on a finite system of rays.* Mat. Stud. 2005, **24** (1), 31–38. (in Ukrainian)

Received 21.08.2013

Хаць Р.В. *Асимптотична поведінка цілих функцій покращеного регулярного зростання в $L^p[0,2\pi]$-метриці* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — C. 341–344.

Описано асимптотичну поведінку цілих функцій покращеного регулярного зростання з нулями на скінченній системі променів в $L^p[0,2\pi]$-метриці.

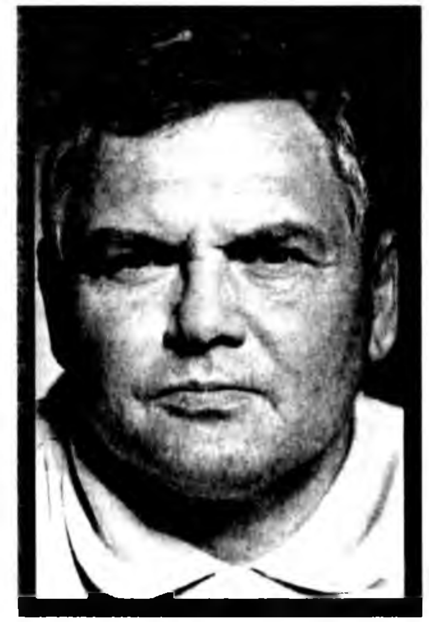
Ключові слова і фрази: ціла функція покращеного регулярного зростання, скінченна система променів, коефіцієнти Фур'є, теорема Гаусдорфа-Юнга.

Хаць Р.В. *Асимптотическое поведение целых функций улучшенного регулярного роста в $L^p[0,2\pi]$-метрике* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — C. 341–344.

Описано асимптотическое поведение целых функций улучшенного регулярного роста с нулями на конечной системе лучей в $L^p[0,2\pi]$-метрике.

Ключевые слова и фразы: целая функция улучшенного регулярного роста, конечная система лучей, коэффициенты Фурье, теорема Гаусдорфа-Юнга.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2



Боднарчук Юрій Вікторович

13.10.1955 – 12.07.2013

12 липня 2013 року, у розквіті творчих сил та планів, помер відомий український математик-алгебраїст, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики Національного університету "Києво-Могилянська академія" — Юрій Вікторович Боднарчук.

Юрій Вікторович Боднарчук народився 13 жовтня 1955 року в Черкасах у родині математиків, Боднарчука Віктора Гавриловича і Правоторової Галини Іванівни. Це була висококультурна родина українських інтелігентів-шестидесятників, які змогли передати свої ідеали справедливості та любові до України і синові. Віктор Гаврилович — відомий математик, учень Глушкова В.М., — був одним із тих, хто підписав відомий лист-протест 139-ти до найвищих керівників СРСР з вимогою припинити практику протизаконних політичних судових процесів. За це його було звільнено з Київського державного університету імені Тараса Шевченка, де він працював за сумісництвом, а в 1972 році, під час другої хвилі репресій, звільнено і з основного місця роботи — Інституту кібернетики АН УРСР. Працювати за фахом йому більше не дали, лише згодом він зміг оформити невеличку пенсію за станом здоров'я. Тиск чинився і на Галину Іванівну. Зокрема, вона була змушена регулярно відвідувати так званий "перший відділ", де від неї вимагали дати згоду на примусове "лікування" Віктора Гавриловича.

Атмосфера людської гідності і взаємоповаги, що панувала в сім'ї, мала вирішальний вплив на формування характеру та поглядів Юрія Вікторовича. Глибокий патріотизм, безкомпромісність у відстоюванні справедливості і водночас велика скромність, любов та повага до людей, готовність завжди прийти їм на допомогу — ось основні риси, його характеру, притаманні йому протягом усього життя.

У 1972 році Юрій Вікторович закінчує середню школу і вступає на механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Тараса Шевченка, який і закінчив у 1977 році, спеціалізуючись по кафедрі алгебри та математичної логіки. По закінченні університету він починає працювати в Українському науково-дослідному гідрометеорологічному інституті (УкгГМІ), однак продовжує цікавитися алгеброю. Зокрема, він бере активну участь у роботі Київського алгебричного семінару, а в 1981 році вступає до аспірантури. Науковим керівником Юрія Вікторовича був видатний алгебраїст Лев Аркадійович Калужнін, який у 60-ті роки минулого століття зміг відродити славетну Київську алгебричну школу, розгромлену і знищену в сталінські часи.

У 1985 році Юрій Вікторович захищає кандидатську дисертацію на тему "Автоморфізми нестандартних вінцевих добутків груп" і продовжує працювати в УкгГМІ.

Педагогічна діяльність Юрія Вікторовича починається у 1990 році, коли він переїжджає до Вінниці на посаду старшого викладача фізико-математичного факультету Вінницького державного педагогічного інституту (з 1998 року — Вінницький педагогічний університет ім. М. Коцюбинського). У 1994 році Юрій Вікторович повертається до Києва і з цього часу і до останніх днів свого життя вся його наукова та педагогічна діяльність пов'язана із Києво-Могилянською Академією. Він стає першим штатним співробітником кафедри фізико-математичних наук департаменту природничих наук, де на посаді доцента пропрацював 3 роки. У 1997 році Юрій Вікторович створює кафедру математики департаменту інформаційних технологій (зараз — кафедра математики факультету інформатики Національного університету "Києво-Могилянська Академія"), на якій працював на посадах доцента та професора, а з 2000 року обійняв посаду завідувача кафедри.

У 2004 році Юрій Вікторович захистив докторську дисертацію на тему "Нескінченновимірні алгебраїчні групи поліноміальних перетворень афінних просторів". У цій дисертації та в роботах, що їй передували або зроблені вже після захисту дисертації, Юрій Вікторович отримав цілий ряд важливих і глибоких алгебраїчних результатів. Зокрема, розглядаючи афінні групи над нескінченими полями як підгрупи групи Кремони, він довів максимальність скінченної афінної групи. Він також довів, що група ручних поліноміальних перетворень породжується афінною групою і одним довільним нелінійним трикутним перетворенням.

Велика частина наукового доробку Юрія Вікторовича присвячена дослідженню автоморфізмів різних груп. Так, йому також належить повний опис регулярних автоморфізмів груп блоково-унітрикутних та блоково-трикутних перетворень над полями характеристики 0 та над скінченними полями. Зокрема, він показав, що будь-який регулярний автоморфізм афінної групи Кремони є внутрішнім. Важливими є результати Юрія Вікторовича про будову автоморфізмів нестандартних вінцевих добутків. Спираючись на ці результати, він зміг охарактеризувати групи автоморфізмів силовських p-підгруп симетричних груп скінченного степеня.

Серед інших результатів Юрія Вікторовича слід відзначити узагальнення відомої теореми Пітера Неймана про ізоморфізм стандартних вінцевих добутків груп на випадок вінцевих добутків транзитивних груп перетворень з абстрактними групами.

Юрій Вікторович проводив величезну організаційно-наукову роботу. Окрім завідування кафедрою він був членом Вченої ради НаУКМА, членом спеціалізованої вченої ради Інституту математики НАНУ, членом Київського математичного товариства, неодноразово опонував докторські та кандидатські дисертації, був незмінним головою редколегії серії "Фізико-математичні науки" (розділ математика) журналу "Наукові записки НаУКМА", членом редколегії журналу "У світі математики", одним з ініціаторів та організаторів проведення міжуніверситетських наукових конференцій молодих вчених з математики та фізики, тощо. Під його керівництвом захищено дві кандидатські дисертації.

Завдяки зусиллям Юрія Вікторовича у 2007 році в Національному університеті "Києво-Могилянська Академія" було відкрито нову спеціальність — "прикладна математика", а у 2012 відбувся перший набір на магістерську програму за цією спеціальністю.

Особливо слід відзначити педагогічну діяльність Юрія Вікторовича. Він не жалів ні часу ні сил на підготовку молодих спеціалістів. Через специфіку Києво-Могилянської Академії більшість математичних курсів для її студентів потрібно було розробляти майже з нуля. Серед них були і зовсім оригінальні курси як, наприклад, курс, присвячений сучасним методам захисту і передачі інформації. Юрій Вікторович також керував великою кількістю дипломних і магістерських робіт. Завдяки педагогічній майстерності і товариському ставленню до студентів він завжди був їх улюбленцем.

Загалом професор Ю.В.Боднарчук є автором понад 40 наукових праць, багатьох науково-методичних розробок, серед яких навчальні посібники з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, дискретної математики, математичної логіки та теорії алгоритмів, вищої математики. За посібник "Основи дискретної математики" (у співавторстві з Б.В.Олійник) Юрій Вікторович отримав премію імені Петра Могили (2009 р.).

Згадка про Юрія Вікторовича зігріває душу. Він назавжди залишиться в пам'яті всіх, хто його знав, як високоінтелігентна, скромна, справедлива, чуйна людина, здатна завжди прийти на допомогу.

Артемович О.Д., Банах Т.О., Гаврилків В.М., Ганюшкін О.Г., Григорчук Р.І., Дрозд Ю.А., Загороднюк А.В., Зарічний М.М., Заторський Р.А., Кириченко В.М., Комарницький М.Я., Никифорчин О.Р., Петравчук А.П., Петричкович В.М., Пилипів В.М., Сущанський В.І., Шарин С.В., Шарко В.М.

Науковий журнал

Карпатські Математичні Публікації

(свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 14703-3674Р)

Том 5, №2
2013

Відповідальний за випуск	д.ф.-м.н. Загороднюк А.В.
Літературна редакція	Шарин С.В.
Комп'ютерна правка та макетування	Патра М.І.

Підписано до друку 27.12.2013 р. Формат $60\times84/_8$.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура URW Palladio L, Pazo Math
Умовн. друк. аркушів 21,16. Наклад 100 примірників.

Друк: пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. 0342 58 04 32